Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I"

Агроинженерный факультет

Кафедра математики и физики

МАТЕМАТИКА

ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания для самостоятельной работы обучающихся по направлению подготовки: Ветеринарно-санитарная экспертиза
профиль подготовки: Ветеринарно-санитарная экспертиза

ВОРОНЕЖ – 2019

Составители:
профессор В.П. Шацкий, доцент А.Е. Попов, .ст. преподаватель Н.Г. Спирина, кафедра математики и физики ВГАУ

Рецензент:

Профессор, зав. кафедрой информационного обеспечения и моделирования агроэкономических систем ВГАУ, д.э.н. А.В. Улезько

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры математики и физики ВГАУ (протокол № 1 от 02.09.2019 г.).

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании методической комиссии факультета ветеринарной медицины и технологии животноводства ВГАУ (протокол № 5 от 02.12.2019 г.).

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, и некоторые общие понятия

При решении многих задач математики, физики и техники часто не удается установить непосредственную зависимость между искомыми и данными переменными величинами, но зато удается составить уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такое уравнение называется **дифференциальным**. Решая его, находят зависимость уже между самими переменными. Дифференциальное уравнение может не содержать в явном виде независимую переменную и искомую функцию, но обязательно должно содержать одну или несколько производных искомой функции.

Например, уравнения

$$y' - 5y = 0 \ , \tag{1}$$

$$y'' + \sin x \cdot y = x + 8 \ , \tag{2}$$

$$y'' + \sin y'' = x + 8, \tag{3}$$

$$y''' + \cos y = tgx \tag{4}$$

будут дифференциальными уравнениями. Отметим, что производную функции y по переменной x мы будем обозначать либо y', либо $\frac{dy}{dx}$.

В механике производную по времени часто обозначают точкой вверху дифференцируемой функции: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$.

Решением, или **интегралом** дифференциального уравнения называется всякая функция, подстановка которой в уравнение превращает его в тождество.

С простейшим дифференциальным уравнением мы уже встречались при решении задачи об отыскании первообразной функции. Действительно, если функция *y=F(x)* есть первообразная для функции *f(x),* то по определению первообразной

$$y' = f(x) \tag{5}$$

Уравнение (5), содержащее производную искомой функции, является простейшим дифференциальным уравнением.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Дифференциальное уравнение называется **линейным**, если неизвестная функция и все ее производные входят в уравнение в первой степени. Если дифференциальное уравнение может быть разрешено в явном виде относительно старшей производной, т.е. приведено к виду:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

где $f(\ldots)$ – некоторая нелинейная функция, то такое уравнение называется **квазилинейным.** В случае невозможности разрешения уравнения относительно старшей производной оно называется **нелинейным**.

Линейное дифференциальное уравнение называется **однородным**, если в каждом слагаемом уравнения присутствует неизвестная функция или ее производные, в противном случае уравнение называется **неоднородным**.

Например, приведенные ранее уравнения можно классифицировать так:

(1) – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка;

(2) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка;

(3) – нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка;

(4) – квазилинейное дифференциальное уравнение третьего порядка.

Рассмотрим некоторые задачи, решение которых приводит к дифференциальным уравнениям.

1. Пусть тело массой m падает с высоты и на него, кроме силы тяжести, действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная квадрату скорости: kv^2 . Тогда, используя второй закон Ньютона, получаем:

$$m\dot{v} = mg - kv^2 .$$

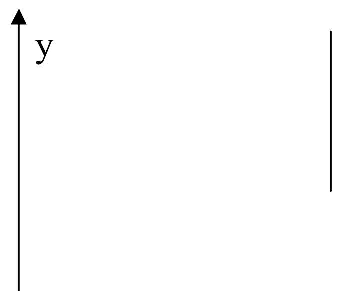
Это квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка.

2. Рассмотрим свободные горизонтальные колебания груза, прикрепленного к пружине жесткости c, вдоль оси x с учетом силы сопротивления, пропорциональной скорости: kv. Учитывая, что сила упругости пружины равна cx и $v = \dot{x}$, получаем:

$$m\ddot{x} = -k\dot{x} - cx \quad .$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

3. Рассмотрим пример задачи, приводящей к системе дифференциальных уравнений. Пусть материальная точка движется в поле силы тяжести под действием силы сопротивления воздуха, пропорциональной квадрату скорости: $F_c = kv^2$ (Рис. 1). Учитывая факт плоского движения точки,



получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F_c \cos\alpha \\ m\ddot{y} = -F_c \sin\alpha - mg \end{cases}$$

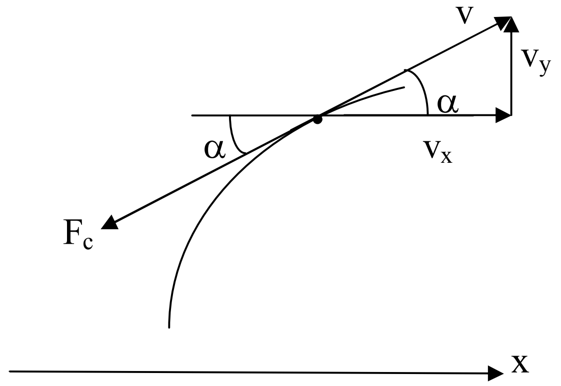


Рис. 1.

Учитывая, что

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$ и

$v_x = v\cos\alpha$ и $v_y = v\sin\alpha$,

получаем

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kv_x v \\ m\ddot{y} = -kv_y v - mg \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m\ddot{x} = -k\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ m\ddot{y} = -k\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - mg \end{cases}.$$

Это система квазилинейных уравнений второго порядка.

Как мы увидим ниже, при нахождении решения дифференциального уравнения приходится в большинстве случаев выполнять операции интегрирования. Поэтому процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется **интегрированием дифференциального уравнения**. Известно, что при интегрировании появляются некоторые произвольные постоянные, поэтому получаемая при решении дифференциального уравнения функция называется **общим решением**. Включение в задачу некоторых дополнительных условий позволяет конкретизировать значения этих постоянных и получить **частное решение** дифференциального уравнения.

Рассмотрим некоторые простейшие дифференциальные уравнения первого порядка. Одними из них являются

2. *Уравнения с разделяющимися переменными*.

Это дифференциальные уравнения, которые после некоторых преобразований приводятся к виду:

$$f(y)dy = \varphi(x)dx. \tag{6}$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$F_1(y) + C_1 = F_2(x) + C_2$ или $F_1(y) = F_2(x) + C$, где $C = C_2 - C_1$.

В некоторых случаях удается выразить из последних соотношений функцию $y(x)$ в явном виде.

Пример 1. Найти решение уравнения: $y' = xy$.

Представим данное дифференциальное уравнение в виде: $\dfrac{dy}{dx} = xy$.

Разделив обе части на *y* умножив на *dx*, получим уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{y} = xdx$. Проинтегрировав это уравнение, получаем: $\ln|y| = x^2/2 + C_1$, или $\ln|y| = x^2/2 + \ln|C_2|$, где $\ln|C_2| = C_1$ Отсюда $\ln|y/C_2| = x^2/2$. Потенцируя, получаем $|y/C_2| = e^{x^2/2}$, или $y = \pm C_2 e^{x^2/2}$, или, окончательно, $y = Ce^{x^2/2}$, где $C = \pm C_2$.

Задачи для самостоятельного решения:

Решить уравнение с разделяющимися переменными: $ay' = f(x, y)$**,** где значения a, f(x, y) определяются из таблицы.

№	a	f(x,y)	№	a	f(x,y)
1	$\sqrt{y}$	ycos(1-2x)	16	(3x+1)lny	y
2	$\cos^2(3x+1)$	y+1	17	x^2+x	y
3	tgx	$y^2\sin 2x$	18	x+1	$(y+1)x^2$
4	sinx	$y^2(\sin x+\cos x)$	19	x+1	$(y+1)(x^2-1)$
5	$y(x^2+4)$	x	20	$\sqrt{x+1}$	e^{y+1}
6	1/x	$\cos^2(2y+1)$	21	$\sqrt{x+1}$	$(x+1)e^y$
7	y	lnx+1	22	$-\sqrt{\cos x}$	ysinx
8	x^2-4	$5xy^3$	23	y	lnx+1
9	$\sin^2(4x-3)$	8y	24	x+1	$x(y^2+4)$
10	e^{-2x}	xy^2	25	x^2+1	x(y+8)
11	e^{-x}	$(x+1)y^2$	26	$\sqrt{x}$	$(y+2)(\sqrt{x}+1)$
12	1	$y\sin^2 x$	27	$y\sqrt{x}$	x+1
13	x+1	(x+4)y	28	$(\sqrt{x}+1)y$	10(x-1)
14	xy	$(\ln x+4)\sqrt{y}$	29	$(\sqrt{x}+1)$	y(x-1)
15	x	$(\ln^2 x+8)\sqrt{y}$	30	1	(y-1)tgx

3. *Однородные уравнения*

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется **однородным**, если его можно записать в виде

$$y' = \varphi(y/x) \ , \tag{7}$$

где правая часть есть функция только от отношения переменных y/x.

Например, уравнение $y' = \cos(\frac{y}{x}) + 2$ - однородное уравнение. Уравнение $y' = \frac{2x^3 - x^2 y}{xy^2}$ - также однородное, так как деля числитель и знаменатель правой части на x^3, получим $y' = \frac{2 - y/x}{(y/x)^2}$.

В однородном уравнении (7) переменные, вообще говоря, не разделяются. Однако оно легко может быть преобразовано в уравнение с разделяющимися переменными.
С этой целью введем новую функцию *z*, положив *z=y/x*, или *y=xz*.

Дифференцируя, находим $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$.

Подставляя последние выражения в уравнение (7), придадим ему вид

$$z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z).$$

В полученном уравнении переменные разделяются. Действительно,

$xdz = [\varphi(z) - z]dx$, и предполагая, что $\varphi(z) - z \neq 0$, получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z}.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\ln|x| = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} + C.$$

Вычисляя интеграл в правой части последнего равенства и возвращаясь к первоначальному переменному *y,* получим общее решение однородного уравнения (7).

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $2xyy' = x^2 + y^2$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{1 + (y/x)^2}{2y/x}.$$

Делая подстановку $y = xz,$ получаем

$$\frac{dz}{dx}x + z = \frac{1+z^2}{2z}, \text{ или } \frac{dz}{dx}x = \frac{1-z^2}{2z}.$$

В полученном уравнении переменные разделяются: $\frac{2zdz}{1-z^2} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, имеем $-\ln\left|1-z^2\right| = \ln|x| - \ln C_1$, откуда $x(1-z^2) = C$,

где $C = \pm C_1$. Возвращаясь к функции *y,* получим $x^2 - y^2 - Cx = 0$.

Задачи для самостоятельного решения:

Решить однородные уравнения:

1. $xyy' = x^2 + y^2$;
2. $xy' + xtg\frac{y}{x} = y$;
3. $xyy' = x^2 - y^2$;
4. $xy' = y + 2xctg\frac{y}{x}$;
5. $x^2y' = y^2 + xy + x^2$;
6. $xy' = y + 3x\sin^2\frac{y}{x}$;
7. $4xyy' - 4y^2 - x^2 = 0$;
8. $xyy' = 8x^2 + y^2$;
9. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;
10. $xy' = x + y$;
11. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$;
12. $x^2y'e^{\frac{x}{y}} = xye^{\frac{x}{y}} + y^2$;
13. $(xy' - y)\sin\frac{y}{x} = x$;
16. $y' = \frac{x+y}{x-y}$;
17. $xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$;
18. $xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$;
19. $xyy' = 2x^2 + y^2$;
20. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$;
21. $xy' = y + y\ln\frac{y}{x}$;
22. $2x^2y' + x^2 + y^2 = 0$;
23. $xy' - y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$;
24. $y + \sqrt{xy} = xy'$;
25. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$;
26. $y' = \frac{y}{x} + 2$;
27. $y' - \frac{y}{x} = 2\frac{y}{x}(\ln y - \ln x)$;
28. $5\sqrt{xy} - y + xy' = 0$;

14. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$;

15. $xy' = y + x\sin\dfrac{y}{x}$;

29. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$;

30. $x^2 y' - y^2 - xy = 0$.

4. *Линейные уравнения*

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется **линейным**, если его можно записать в виде:

$y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x), q(x)$ — заданные функции.

Предварительно отметим, что любую функцию $y(x)$ можно представить в виде произведения двух функций, причем одну из них можно выбрать произвольно. Действительно, задавшись функцией $p(x)$ всегда можно записать: $y(x) = p(x)* y(x)/ p(x)$.

Будем искать неизвестную функцию y в виде произведения двух функций u и v по формуле $y=uv$. Подставив это произведение в исходное уравнение, получим $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$, или

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x). \tag{8}$$

Выберем функцию v таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках равнялось нулю (как было сказано выше, одну из функций мы можем выбирать произвольно). Это действие приводит к уравнению: $\dfrac{dv}{dx} = -p(x)v$, или $\dfrac{dv}{v} = -p(x)dx$. Интегрируя полученное уравнение с разделяющимися переменными и полагая равенство нулю произвольной постоянной, получим:

$\ln|v| = -\int p(x)dx$, или $v = e^{-\int p(x)dx}$. Уравнение (8) теперь принимает следующий вид: $u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, или $u' = q(x)e^{\int p(x)dx}$. Интегрируя полученное равенство, находим $u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$. Подставляя в формулу: $y=uv$, получаем искомую функцию.

Пример 3. Найти общее решение уравнения: $y' - y = x$.

Вводя обозначение: $y=uv$, получаем $u'v + uv' - uv = x$, или

$$u'v + u[v' - v] = x.$$

Приравнивая квадратную скобку нулю, получаем уравнение: $\frac{dv}{dx} = v$, или $\frac{dv}{v} = dx$. Интегрируя, получим: $\ln|v| = x$, или $v = e^x$. Тогда получаем: $u'e^x = x$, или $u' = xe^{-x}$. Отсюда $u = \int xe^{-x}dx$. Интегрируя по частям, получаем: $u = -e^{-x}(x+1) + C$ Подставляя в формулу: *y*=*uv*, получаем искомую функцию: $y = Ce^x - x - 1$. При необходимости нахождения частного решения, например, при условии: *y*(0)=1, получаем: 1=*C*-1, откуда *C*=2. Тогда частное решение принимает вид: $y = 2e^x - x - 1$.

Задачи для самостоятельного решения:

Решить уравнение: $ay' + by = f(x)$, где значения a, b, f(x) определяются из таблицы

№	**a**	**b**	**f(x)**	**№**	**a**	**b**	**f(x)**
1	x	-1	x^3+1	16	1	1/x	sin5x
2	x^2	-x	x^2+11	17	x^2-1	-x	1
3	1	-cosx	5cosx	18	x^2-1	2x	cosx
4	1	2x	xe^{-x^2}	19	sinxcosx	-1	$\sin^3x$
5	1	cosx	sin2x	20	1	tgx	$\cos^2x$
6	1	cosx	$e^{-\sin x}$	21	1	-4	cosx
7	1	tgx	sin2x	22	x	1	lnx+1
8	1	-tgx	3sin2x	23	x	-1/(x+1)	x
9	x	1	xsinx	24	1	-1/(1-x)	x+1
10	x	-1	x/lnx	25	4	2x	xe^{-x^2}
11	x	-1	$x^2\sin x$	26	1	$-3x^2$	x^5+x^2
12	x^2	-1	$x^2e^{1-1/x}$	27	1	-1/(x+2)	x^2+4x+5
13	x^2+1	-x	1	28	x	1	e^x
14	x^2+1	-x	x+1	29	x	1	x^2e^x
15	x^2+1	x	$x(x^2+1)$	30	x^2+1	2x	$2x^2$

Задачи для самостоятельного решения:
Найти частное решение уравнения:

1. $y' + y \cdot tgx = \cos x$; y(0) = 1;
2. $y' - ytgx = x$; y(0) = 1;
3. $y' + 2xy = 2x$; y(1) = 2 ;
4. $xy' + y = \dfrac{\ln x}{x}$; y(1) = 2;
5. $y' + \dfrac{y}{x+1} = -1$; y(0) = 1;
6. $y' + \dfrac{2y}{x} = -x^2$; $y(3) = 1$;
7. $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$; $y(0) = 2$;
8. $6y' + xy = 2xe^{-x^2}$; $y(0) = 4$;
9. $y' - \dfrac{3y}{x} = x^3 e^x$; $y(1) = e$;
10. $y' \sin x - y \cos x = 1$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;
11. $xy' - 3y = x^4 e^x$; $y(1) = e$;
12. $y' \cos x + y \sin x = 1$; $y(0) = 2$;
13. $xy' - 2y = x^3 \cos x$; $y(\pi) = 1$;
14. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;
15. $y' - \dfrac{y}{x} = x \cos x$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;
16. $xy' + 2y = \dfrac{1}{x}$; $y(3) = 1$;
17. $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$; $y(0) = 5$;
18. $y' - \dfrac{y}{x} = -2 \ln x$; $y(1) = 1$;
19. $x^2 y' + xy + 1 = 0$; $y(1) = 2$;
20. $y' + y = \dfrac{1}{e^x}$; $y(0) = \dfrac{1}{2}$;
21. $y' - \dfrac{3y}{x} = x$; $y(1) = 3$;
22. $y' - 2xy = 2x$; $y(0) = 2$;
23. $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2 e^{3x}$; $y(1) = e^3$;
24. $y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x$; $y(0) = 1$;
25. $y' \cos x - 2y \sin x = 2$; $y(0) = 3$;
26. $y' x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$; $y(e) = 0$;
27. $y' - y \sin x = e^{-\cos x} \sin 2x$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$;
28. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^2$; $y(0) = \dfrac{1}{2}$;
29. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$; $y(-2) = 5$;
30. $y' - y \sin x = e^{-\cos x} \sin 2x$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$;

5. *Приближенные решения дифференциальных уравнений первого порядка*

В некоторых случаях попытка решения дифференциального уравнения первого порядка приводит к интегралам, которые невозможно представить в виде комбинации элементарных функций. В этом случае приходится прибегать к приближенным решениям.

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$y' = f(x,y) \text{ в области } x > x_0,$$

удовлетворяющее некоторому дополнительному условию: $y(x_0)=y_0$.

Разобьем участок интегрирования на равные участки $h=x_{i+1}-x_i$. Тогда при достаточно малых h производную функции y можно приближенно представить в виде:

$$y' = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Тогда интересующее нас уравнение примет вид:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \text{ или } y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h.$$

Начиная от (x_0,y_0) по последней рекуррентной формуле можно определить значения неизвестной функции $y_i(x_i)$. Указанные действия легко программируются на любом алгоритмическом языке в виде операторов цикла и условных операторов перехода к окончанию процесса вычисления.

6. *Простейшие уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка*

В этом пункте мы рассмотрим уравнения второго порядка, которые с помощью замены переменной сводятся к уравнениям первого порядка. Такое преобразование уравнения называется понижением порядка. Не говоря об уравнении $y'' = f(x)$, которое решается двукратным интегрированием, Простейшими уравнениями второго порядка, допускающими понижение порядка, являются следующие:

$$y'' = f(x, y')$$

$$y'' = f(y, y')$$

Рассмотрим последовательно, как осуществляется понижение порядка и как интегрируется каждое из указанных уравнений.

Первое из этих уравнений решается введением новой функции *v(x),* положив $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$ и мы получим уравнение первого порядка $z'(x) = f(x)$. Решая его относительно функции $z(x)$, а затем интегрируя, получим искомое решение.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - \frac{1}{x} y' = 0$.

Полагая $y' = z(x)$, получаем уравнение $z' - \frac{1}{x} z = 0$. Преобразуя, получаем уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим: $\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$, или $z = C_1 x$. Заменяя *z(x)* на y' и интегрируя еще раз, находим общее решение уравнения:

$$y(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 .$$

Уравнение $y'' = f(y, y')$ не содержит явно независимой переменной *x*. Для понижения порядка уравнения снова вводим новую функцию, зависящую от переменной *y*, полагая $y' = z(x)$. Дифференцируем это равенство по *x*, помня, что *y* является функцией от *x*:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ или } \; y'' = \frac{dz}{dy} z .$$

Подставляя последние соотношения в исходное уравнение, получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dz}{dy} z = f(y, z).$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'^2 + 1 = 2yy''$.

Делая указанную выше подстановку, получаем уравнение:

$$z^2 + 1 = 2yz \frac{dz}{dy}.$$

Разделив переменные, получим: $\frac{2zdz}{1+z^2} = \frac{dy}{y}$. Интегрируя и проводя несложные преобразования, находим, что $z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$, или

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Это уравнение преобразуется к виду:

$$dx = \frac{dy}{\pm\sqrt{C_1 y - 1}}.$$

Интегрируя, получаем: $x + C_2 = \pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1}$, откуда

$$y = \frac{C_1^2 (x + C_2)^2 + 4}{4C_1}.$$

Задачи для самостоятельного решения:

Решить уравнение

1. $y'' x \ln x = y'$;
2. $2xy'' = y'$;
3. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$;
4. $y'' \cos x + y' \sin x = 0$;
5. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$;
6. $xy'' - y' = 0$;
7. $y'' = \frac{y'}{x} + x$;
8. $x^2 y'' + xy' = 1$;
9. $xy'' - 2y' = 2x^4$;
10. $y'' - \frac{y'}{x} = xe^x$;
11. $y'' + y' tgx = \sin 2x$;
12. $xy'' - y' = x^2 \cos x$;
13. $y'' tgx = y' + 1$;
14. $xy'' - y' - x^2 = 0$;
15. $y'' - yctgx = \sin x$;
16. $y'' + (y')^2 = 0$;
17. $yy'' = y^2 y' + (y')^2$;
18. $2yy'' = (y')^2$;
19. $yy'' + (y')^2 = y'$;
20. $y''(3y + 4) - 3(y')^2 = 0$;
21. $y'' tgy = 2(y')^2$;
22. $y^2 + (y')^2 = yy''$;
23. $2y(y')^3 + y'' = 0$;
24. $2yy'' = 1 + (y')^2$;
25. $y'' = 2yy'$;
26. $(2y - 1)y'' = 2(y')^2$;
27. $y'' = (y')^3 2y$;
28. $y'' - e^y y' = 0$;
29. $y^3 y'' = 3$;
30. $y'' y' = 2y$.

7. *Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*

К этому классу относятся дифференциальные уравнения вида

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Полагая, что $a\neq0$, деля обе части уравнения на a и обозначая $b/a=p$, $c/a=q$, получаем

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{9}$$

Решение этого уравнения начинается с составления характеристического уравнения. Для этого искомая функция y заменяется на новую неизвестную z, а порядок производной - на соответствующую степень:

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения имеет вид:

$$z = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{10}$$

В зависимости от знака дискриминанта этого уравнения можно выделить три случая:

1) $p^2 - 4q > 0$. Тогда уравнение (10) имеет два различных действительных корня: z_1 и z_2 . В этом случае решение уравнения (9) имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}. \tag{11}$$

2) $p^2 - 4q = 0$. Тогда уравнение (10) имеет два совпадающих действительных корня: $z_1=z_2=z$. В этом случае решение уравнения (9) имеет вид:

$$y(x) = e^{zx}(C_1 x + C_2). \tag{12}$$

3) $p^2 - 4q < 0$. Тогда уравнение (10) имеет два комплексно-сопряженных корня: $z = \alpha \pm i\beta$. В этом случае решение уравнения (9) имеет вид:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)). \tag{13}$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения: $y'' + 9y = 0$.

Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид: $z^2 + 9 = 0$.

Решая, получаем: $z = \pm 3i$.Тогда решение исходного дифференциального уравнения записывается в виде: $y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$.

Пример 7. Найти решение уравнения: $y'' + 2y' = 0$, удовлетворяющее условиям: $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид: $z^2 + 2z = 0$. Решая, получаем: $z_1 = 0, z_2 = -2$. Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения записывается в виде: $y(x) = C_1 + C_2 e^{-2x}$.

Дифференцируя, получаем: $y(x) = -2C_2 e^{-2x}$. Подставляя в полученные уравнения начальные условия, получаем:

$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -2 = -2C_2 \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} 0 = C_1 \\ 1 = C_2 \end{cases}$ Окончательно получаем: $y(x) = e^{-2x}$.

Задачи для самостоятельного решения:

Найти частное решение уравнения:

1. $y'' - 8y' + 16y = 0;$ $\quad y(0) = 2;$ $\quad y'(0) = 5;$
2. $y'' - 6y' + 8y = 0;$ $\quad y(0) = 1;$ $\quad y'(0) = 2;$
3. $y'' + 3y' = 0;$ $\quad y(0) = 1;$ $\quad y'(0) = 2;$
4. $y'' + y' = 0;$ $\quad y(0) = 1;$ $\quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0;$
5. $y'' - 4y' + 20y = 0;$ $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$ $\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$
6. $y'' - 2y' + y = 0;$ $\quad y(1) = 0;$ $\quad y'(1) = 2;$
7. $y'' + y' - 6y = 0;$ $\quad y(0) = 1;$ $\quad y'(0) = 2;$
8. $y'' + y = 0;$ $\quad y(\pi) = -1;$ $\quad y'(\pi) = -4;$
9. $y'' - 4y' + 13y = 0;$ $\quad y(\pi) = 0;$ $\quad y'(\pi) = 1;$
10. $y'' - 7y' + 6y = 0;$ $\quad y(0) = 2;$ $\quad y'(0) = 0;$
11. $y' - 2y' = 0;$ $\quad y(0) = 2;$ $\quad y'(0) = 4;$
12. $y'' + 8y' + 16y = 0;$ $\quad y(0) = 1;$ $\quad y'(0) = 0;$
13. $y'' + 2y' - 3y = 0;$ $\quad y(0) = 0;$ $\quad y'(0) = 2;$
14. $y'' - 6y' + 5y = 0;$ $\quad y(0) = 3;$ $\quad y'(0) = 0;$
15. $y'' + 4y = 0;$ $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;$ $\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.$
16. $y'' - 7y' + 10y = 0;$ $\quad y(0) = 2;$ $\quad y'(0) = -1;$
17. $y'' - 6y' + 9y = 0;$ $\quad y(0) = 1;$ $\quad y'(0) = 0;$
18. $y'' + 8y' + 7y = 0;$ $\quad y(0) = 2;$ $\quad y'(0) = 1;$

19. $y'' + 49y = 0$; $y(\pi) = 0$; $y'(\pi) = 1$;

20. $y'' - 7y' + 12y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -2$;

21. $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$;

22. $y'' + 9y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -3$;

23. $y'' + 2y' + 10y = 0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

24. $y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 5$; $y'(0) = 0$;

25. $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$;

26. $y'' + 16y = 0$; $y(\pi) = -1$; $y'(\pi) = -1$;

27. $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$;

28. $y'' - 6y' = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -2$;

29. $y'' + 10y' + 25y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$;

30. $y'' - 4y' + 20y = 0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

8. *Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*

Уравнения, рассматриваемые в этом разделе имеют вид:

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

где $f(x)$ – некоторая функция, называемая правой частью уравнения.

Общее решение неоднородного уравнения складывается из общего решения однородного $y_0(x)$ (см. выше) и частного решения неоднородного уравнения $Y(x)$. Частное решение – это любая функция, удовлетворяющая уравнению. Ясно, что вид частного решения напрямую зависит от вида правой части уравнения.

1 случай. Пусть правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n. Если α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде:

$$Y(x) = e^{\alpha x} Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, но с неопределенными коэффициентами.

Если же α является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде: $Y(x) = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$,

где k=1, если α - простой корень характеристического уравнения:

k=2, если α - кратный корень характеристического уравнения.

Примеры правых частей уравнений и вида частного решения:

z_1	z_2	$f(x)$	$Y(x)$
1	2	$e^{3x}(x^2+4)$	$e^{3x}(Ax^2+Bx+C)$
3	3	$e^{3x}(x^2+4)$	$x^2e^{3x}(Ax^2+Bx+C)$
3	4	$e^{3x}(x^2+4)$	$xe^{3x}(Ax^2+Bx+C)$
2	5	x^3-5	Ax^3+Bx^2+Cx+D
0	3	$x-7$	$x(Bx+C)$

Пример 8. Найти общее решение уравнения:

$$y'' - 2y' - 3y = (x+2)e^{3x}.$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $z^2 - 2z - 3 = 0$; $z_1 = -1$, $z_2 = 3$. Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Так как среди корней характеристического уравнения имеется корень $z_2 = 3$, то частное решение следует искать в виде: $\overline{y} = (Ax+B)e^{3x}x$

Находим $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$:

$$\overline{y}' = (2Ax+B)e^{3x} + 3(Ax^2+Bx)e^{3x},$$

$$\overline{y}'' = 2Ae^{3x} + 6(2Ax+B)e^{3x} + 9(Ax^2+Bx)e^{3x}.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, после приведения подобных членов и сокращения на e^{3x}, находим:

$$8Ax + (2A + 4B) = x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, находим:

$$\begin{cases} 8A = 1 \\ 2A + 4B = 2 \end{cases},$$

откуда A=1/8 и B=7/16.

Подставляя найденные значения в выражение для $\bar{y}$, найдем частное решение уравнения

$$\bar{y} = (\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x)e^{3x}.$$

Общее решение находится как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y = Y + \bar{y} = (\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x)e^{3x} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

В случае необходимости нахождения решения, удовлетворяющего дополнительным условиям, например: $y(0) = 1, y'(0) = 0$, необходимо продифференцировать последнее равенство:

$$y = (\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x)3e^{3x} + (\frac{1}{4}x + \frac{7}{16})e^{3x} - C_1e^{-x} + 3C_2e^{3x}.$$

Подставляя указанные условия в последние равенства, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = 7/16 - C_1 + 3C_2 \end{cases}.$$

Решение полученной системы представляется в виде: C_1=55/64, C_2=9/64. Тогда частное решение поставленной задачи принимает вид:

$$y = (\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x)3e^{3x} + (\frac{1}{4}x + \frac{7}{16})e^{3x} - \frac{55}{64}e^{-x} + \frac{27}{64}e^{3x}.$$

Задачи для самостоятельного решения:

Найти общее решение уравнения:

1. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(x + 1)$; 2. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(3x - 1)$;

3. $y'' + 3y' = e^{-3x}(2x + 1)$; 4. $y'' - 4y' + 3y = e^{x}(2x + 2)$;

5. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(2 - 2x)$; 6. $y'' + y' = e^{-x}(4 + 3x)$;

7. $y'' + 2y' - 8y = -2xe^{-4x}$; 8. $y'' + y' - 6y = xe^{-3x}$;

9. $y'' + 9y' = 3x^2 - 2$;

10. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}(x-1)$;

11. $y'' + 3y' - 10y = 4xe^{5x}$;

12. $y'' + 5y' = 2x - x^2$;

13. $y'' - 4y' - 5y = e^{-x}(2-x)$;

14. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}(3x+1)$;

15. $y'' - 2y' = -3xe^{2x}$;

16. $y'' - 8y' + 12y = 5xe^{2x}$;

17. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}(4x-2)$;

18. $y'' + 7y' = 2x^2 - 4x$;

19. $y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x}$;

20. $y'' + y' - 2y = e^{-2x}(x+2)$;

21. $y'' - 5y' = 2x \quad + 3x + 2$;

22. $y'' + 7y' + 12y = 3xe^{-3x}$;

23. $y'' - 2y' + y = e^{x}(2x-1)$;

24. $3y'' - 5y' - 2y = -4xe^{2x}$;

25. $2y'' - y' - 6y = e^{-x}(4x+3)$;

26. $y'' + 12y' = 3x^2 - 5x + 1$;

27. $3y'' + 8y' - 3y = xe^{-3x}$;

28. $2y'' + y' - y = e^{2x}(2-x)$;

29. $y'' + y' = e^{-x}(x^2 - 2)$;

30. $3y'' - 2y' - y = -5xe^{x}$.

2 случай. Правая часть уравнения $f(x) = M\cos bx + N\sin bx$, где *M, N* и *b*—заданные числа.

В этом случае частное решение *y* следует искать в виде:

$$\bar{y} = (A\cos bx + B\sin bx)x^k,$$

где *A* и *B*—неизвестные коэффициенты, а *k* равно числу корней характеристического уравнения, совпадающих с *ib*.

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$$

и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 2$.

Решение. Характеристическое уравнение $z^2 + 4z + 5 = 0$ имеет корни $z_1 = -2 - i$, $z_2 = -2 + i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид: $Y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

Так как $bi = +i$ не является корнем характеристического уравнения, то $k=0$ и частное решение надо искать в форме:

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x.$$

Дифференцируя, находим

$\bar{y}' = -A\sin x + B\cos x$, $\bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x$.

Подставляя полученные выражения в данное неоднородное дифференциальное уравнение, получим:

$$-A\cos x - B\sin x + 4(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) =$$

$$= 2\cos x - \sin x$$

Группируя и приводя подобные члены, имеем

$$(4\text{A} + 4\text{B})\text{cosx} + (4\text{B} - 4\text{A})\text{sinx} = 2\text{cosx} - \text{sin}x\,.$$

Написанное равенство является тождеством. Поэтому коэффициенты при cosx и sinx в левой и правой частях равенства должны быть равны. Приравнивая эти коэффициенты, получим систему уравнений для определения *A* и *B*.

$$\begin{cases} 4A + 4B = 2 \\ 4B - 4A = -1 \end{cases}.$$

Из этой системы находим B = 1/8 A =3/8.

Таким образом, частное решение имеет вид:

$$\bar{y} = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x,$$

а общее решение уравнения

$$y = \bar{y} + Y = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x + e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

Для выделения частного решения используем заданные начальные условия: $y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 2$. Так как

$$y' = -\frac{3}{8}\sin x + \frac{1}{8}\sin x - 2e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) +$$
$$+ e^{-2x}(-C_1\sin x + C_2\cos x),$$

то

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{3}{8} + C_1 \\ 2 = \dfrac{1}{8} - 2C_1 + C_2 \end{cases}.$$

Отсюда $C_1 = 5/8, \quad C_2 = 25/8$.

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x + e^{-2x}\left(\frac{5}{8}\cos x + \frac{25}{8}\sin x\right).$$

Пример 10. Найти общее решение уравнения:

$$y'' + 4y = 5\sin 2x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $z^2+4=0$ имеет корни $z=2i$, $z=-2i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Заметим, $bi=2i$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения и, следовательно, $k=1$. Поэтому, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$\overline{y} = (A\cos 2x + B\sin 2x)x.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, последовательно получим:

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 5\sin 2x.$$

Отсюда A=-5/4, B=0.

Таким образом, $\overline{y} = -\dfrac{5}{4}x\cos 2x$ и общее решение неоднородного уравнения запишется в виде:

$$y = -\frac{5}{4}x\cos 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Задачи для самостоятельного решения:

Найти общее решение уравнения:

1. $y'' - 2y' + 5y = 3\cos 2x$;
2. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$;
3. $y'' + y = \cos x + \sin x$;
4. $y'' + 16y = -\cos 4x$;
5. $y'' - 4y' + 8y = 2\sin 4x$;
6. $y'' + 4y = \cos 2x + 2\sin 2x$;
7. $y'' - 4y' + 5y = -3\cos x$;
8. $y'' + 9y' + 25y = -5\cos 5x$;
9. $y'' + 2y = 2\sin\sqrt{2}x$;
10. $2y'' + 2y' + 5y = -\cos 2x$;
11. $y'' + 9y = 3\cos 3x$;
12. $y'' + 8y' + 32y = -8\cos x$;
13. $y'' + 2y' + 2y = 2\sin 4x$;
14. $y'' - 6y' + 13y = \cos 3x$;
15. $y'' + 6y' + 18y = -3\cos 2x$;
16. $y'' + 36y = \sin 6x$;
17. $y'' - 12y' + 36y = -3\cos x$;
18. $y'' + 25y = 2\cos 5x$;

19. $y'' - 4y' + 13y = \cos 2x$;

20. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin 3x$

21. $y'' + y' + 2{,}5y = 4\cos 3x$;

22. $4y'' + 4y' + 5y = 2\sin 2x$;

23. $y'' - 2y' + 10y = \sin x - 2\cos x$.

24. $4y'' - 4y' + 17y = -\sin x + 3\cos x$;

25. $y'' + 4y' + 8y = -\sin 2x + 2\cos 2x$;

26. $y'' + 6y' + 10y = -3\sin x + \cos x$;

27. $y'' + 8y' + 17y = 4\sin x - 2\cos x$;

28. $y'' + 10y' + 50y = 5\sin x + 10\cos x$;

29. $y'' - 16y' + 64y = 2\sin x + \cos x$;

30. $y'' + 6y' + 13y = \cos 3x - \sin 3x$

В заключение приведем теорему, которая часто применяется при решении линейных уравнений.

Теорема. Если $\overline{y_1}$ есть частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x)$$

и $\overline{y_2}$ есть частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_2(x),$$

с одной и той же левой частью, то сумма $\overline{y_1} + \overline{y_2}$ будет частным решением уравнения:

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

9. *Приближенные решения дифференциальных уравнений второго порядка*

В случае возникновения задачи, сводящейся к решению квазилинейных уравнений второго порядка, часто приходится прибегать к приближенным решениям.

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$y'' = f(x,y,y')$ в области $x > x_0$,

удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям:

$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$.

Разобьем участок интегрирования на равные участки $h=x_{i+1}-x_i$. Тогда при достаточно малых h вторую производную функции y можно приближенно представить в виде:

$$y'' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}.$$

Тогда интересующее нас уравнение примет вид:

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} = f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}), \text{ или}$$

$$y_{i+2} = 2y_{i+1} - y_i + h^2 f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}).$$

Второе начальное условие позволяет получить соотношение:

$\frac{y_1 - y_0}{h} = y'_0$. Отсюда получаем $y_1 = y_0 + y'_0 h$.

Начиная от (x_0,y_0) и (x_1,y_1) по последней рекуррентной формуле можно определить значения неизвестной функции $y_i(x_i)$. Как и ранее, указанные действия легко программируются на любом алгоритмическом языке в виде операторов цикла и условных операторов перехода к окончанию процесса вычисления.

10. *Применение дифференциальных уравнений второго порядка к задачам механических колебаний*

Рассмотрим горизонтальные колебания груза вдоль оси x под действием восстанавливающей силы: $F_1 = -cx$ и силы сопротивления, пропорциональной скорости: $F_2 = -f\dot{x}$. Дифференциальное уравнение колебаний принимает вид: $m\ddot{x} = -f\dot{x} - cx$.

В этих формулах c – жесткость пружины, f – коэффициент сопротивления, m – масса тела. Сократив на m, и введя обозначения $c/m = k^2$, $f/m = 2n$, получаем:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0.$$

Решение характеристического уравнения $z^2 + 2nz + k^2 x = 0$ имеет вид:

$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$. В зависимости от знака подкоренного выражения возможны три случая.

1.Случай малого сопротивления: $n < k$. Тогда корни характеристического уравнения комплексны: $z_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}$ и решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-nt}(C_1 \cos(\sqrt{k^2 - n^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t)).$$

Введя новые неизвестные A и α $C_1 = A\cos\alpha, C_2 = A\sin\alpha$ и используя формулу синуса суммы аргументов, получаем:

$$x(t) = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \alpha).$$

Постоянные A и α называются соответственно начальной амплитудой и начальной фазой колебаний и могут быть определены из начальных условий. Присутствие в последней формуле множителя e^{-nt} показывает, что амплитуда будет убывать, поэтому такие колебания называются затухающими. Этот случай качественно изображен на рис.2. В случае отсутствия сопротивления n=0, решение уравнения колебаний примет вид:

$$x(t) = A\sin(kt + \alpha).$$

очевидно, что в этом случае колебания не будут затухающими, так как амплитуда остается неизменной.

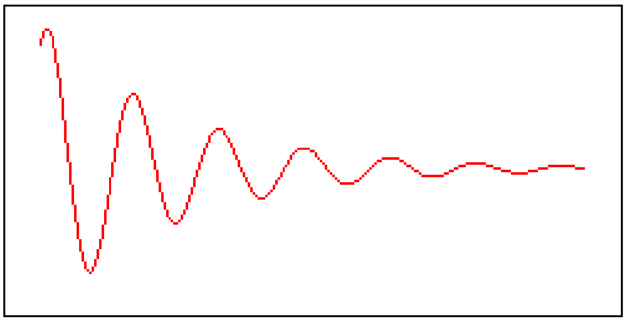


Рис.2

2. Случай большого сопротивления: $n > k$. Тогда корни характеристического уравнения действительны и различны: $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ и решение имеет вид: $x(t) = C_1e^{z_1t} + C_2e^{z_2t}$.

3. Случай критического сопротивления: $n = k$. В этом случае мы получаем кратные корни характеристического уравнения $z = z_1 = z_2$ и решение в этом случае имеет вид:

$$x(t) = e^{-nt}(C_1t + C_2).$$

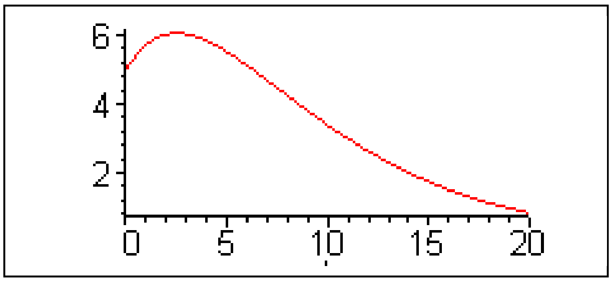


Рис.3.

Случаи 2 и 3 носят приблизительно одинаковый характер и качественно иллюстрируются кривой на рис.3. В этих случаях колебаний не происходит, а возникает так называемое апериодическое движение.