Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
"Воронежский государственный аграрный университет
имени императора Петра I"

Кафедра математики и физики

МАТЕМАТИКА

Методические указания для самостоятельной работы обучающихся по направлению подготовки: Ветеринарно-санитарная экспертиза
профиль подготовки: Ветеринарно-санитарная экспертиза

ВОРОНЕЖ – 2019

Составители:
профессор В.П. Шацкий, доцент А.Е. Попов, .ст. преподаватель Н.Г. Спирина, кафедра математики и физики ВГАУ

Рецензент:

Профессор, зав. кафедрой информационного обеспечения и моделирования агроэкономических систем ВГАУ, д.э.н. А.В. Улезько

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры математики и физики ВГАУ (протокол № 1 от 02.09.2019 г.).

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании методической комиссии факультета ветеринарной медицины и технологии животноводства ВГАУ (протокол № 5 от 02.12.2019 г.).

Настоящие методические указания содержат типовые расчеты по математике для обучающихся по направлению: Государственное и муниципальное управление. Профиль подготовки бакалавра: Муниципальное управление сельских территорий

Предлагаемые типовые расчеты содержат индивидуальные задания и подробные решения типовых задач.

Тема 1. Элементы аналитической геометрии

ЗАДАЧА 1.

Даны координаты вершин треугольника ABC.
Требуется построить треугольник в системе координат и:

1) найти длину стороны AB;

2) составить уравнения сторон AB и AC и найти их угловые коэффициенты;

3) вычислить внутренний угол треугольника при вершине A;

4) составить уравнение высоты CD;

5) найти длину высоты CD;

6) найти площадь треугольника ABC.

Вариант	**Координаты вершин треугольника**
1	A (- 4; 5), B (5; 2), C (3; - 4)
2	A (- 3; 5), B (6; 2), C (4; - 4)
3	A (- 5; 5), B (4; 2), C (2; - 4)
4	A (- 4; 4), B (5; 1), C (3; - 5)
5	A (- 4; 6), B (5; 3), C (3; - 3)
6	A (- 3; 6), B (6; 3), C (4; - 3)
7	A (- 5; 4), B (4; 1), C (2; - 5)
8	A (-3; 4), B (6; 1), C (4; - 5)
9	A (- 5; 6), B (4; 3), C (2; - 3)
10	A (- 3; 3), B (6; 0), C (1; - 6)
11	A (- 2; 5), B (7; 2), C (5; - 4)
12	A (- 6; 5), B (3; 2), C (1; - 4)
13	A (- 4; 7), B (5; 4), C (3; - 2)
14	A (- 4; 3), B (5; 0), C (3; - 6)
15	A (- 1; 5), B (8; 2), C (6; - 4)

16	A (- 7; 5), B (2; 2), C (0; - 4)
17	A (- 4; 8), B (5; 5), C (3; - 1)
18	A (- 4; 2), B (5; - 1), C (3; - 7)
19	A (0; 5), B (9; 2), C (7; - 4)
20	A (- 8; 5), B (1; 2), C (- 1; - 4)
21	A (- 2; 7), B (7; 4), C (5; - 2)
22	A (- 6; 7), B (3; 4), C (1; - 2)
23	A (- 2; 3), B (7; 0), C (5; - 6)
24	A (- 6; 3), B (3; 0), C (1; - 6)
25	A (- 2; 6), B (7; 3), C (5; - 3)
26	A (- 2; 4), B (7; 1), C (5; - 5)
27	A (- 6; 4), B (3; 1), C (1; - 5)
28	A (- 6; 6), B (3; 3), C (1; - 3)

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ

ПРИМЕР. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: A(- 1; 6), B(11; - 3), C(9; 11). Требуется:

1. Найти длину стороны AB.
2. Составить уравнения сторон AB и AC и найти их угловые коэффициенты.
3. Вычислить угол при вершине A.
4. Составить уравнение высоты CD и найти ее длину.
5. Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение.

1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.1)$$

Используя формулу (1.1) и координаты точек A, B, находим длину стороны AB: $d = AB = \sqrt{(11+1)^2 + (-3-6)^2} = 15$.

2. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (1.2)$$

Подставляя в него координаты точек A и B, находим уравнение стороны AB и приводим его к уравнению прямой общего вида $Ax+By+C=0$:

$$\frac{y-6}{-3-6}=\frac{x+1}{11+1},\Rightarrow \frac{y-6}{-9}=\frac{x+1}{12},\Rightarrow \frac{y-6}{-3}=\frac{x+1}{4},\Rightarrow$$

$$4(y-6)=-3(x+1),\Rightarrow \underline{3x+4y-21=0.}$$

От полученного уравнения нетрудно перейти к уравнению прямой с угловым коэффициентом $y=kx+b$:

$$3x+4y-21=0,\Rightarrow \underline{y=-\frac{3}{4}x+\frac{21}{4}}.$$

Это уравнение стороны AB с угловым коэффициентом $\underline{k_{AB}=-\frac{3}{4}}$.

Подставляем теперь в (1.2) координаты точек A, C и получаем уравнение стороны AC сначала в общем виде, а затем в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$\frac{y-6}{11-6}=\frac{x+1}{9+1}, \Rightarrow \quad \frac{y-6}{5}=\frac{x+1}{10}, \Rightarrow$$

$$\frac{y-6}{1}=\frac{x+1}{2}, \Rightarrow 2(y-6)=x+1, \Rightarrow$$

$$2y-x-13=0, \quad \Rightarrow \quad \underline{y=\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}}.$$

Таким образом, угловой коэффициент прямой AC равен $\underline{k_{AC}=\frac{1}{2}}$.

3. Если даны две прямые, угловые коэффициенты которых k_1 и k_2, то тангенс угла φ между ними вычисляется по формуле

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}. \qquad (1.3)$$

Для определения внутреннего угла треугольника при вершине A используем угловые коэффициенты прямых AB и AC: $k_1 = k_{AB} = -\frac{3}{4}$; $k_2 = k_{AC} = \frac{1}{2}$. Отсюда по формуле (1.3)

$$\operatorname{tg}\angle A = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = 2.$$

Теперь с помощью инженерного микрокалькулятора найдем сам угол: $\underline{\angle A = \operatorname{arctg} 2 = 63^0 26'}$.

4. Высота CD перпендикулярна стороне AB. Известно, что если две прямые взаимно перпендикулярны, то их угловые коэффициенты k_1 и k_2 удовлетворяют условию

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Отсюда $k_{CD} \cdot k_{AB} = -1$, т.е. $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{3}$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(x_0; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k, имеет вид

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0). \tag{1.4}$$

Подставляя в уравнение (1.4) координаты точки C и значение углового коэффициента $k = k_{CD} = \frac{4}{3}$, получаем уравнение высоты CD: $y - 11 = \frac{4}{3}(x - 9)$, $\Rightarrow$ $y - 11 = \frac{4}{3}x - 12, \Rightarrow$

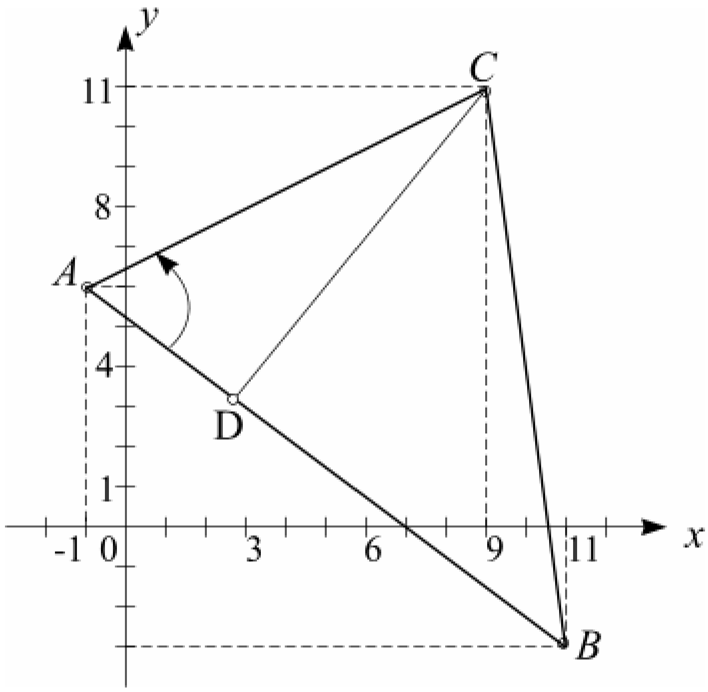
$$y = \frac{4}{3}x - 1, \Rightarrow \underline{4x - 3y - 3 = 0.}$$

Для определения длины высоты CD найдем координаты точки D – точки пересечения высоты CD и стороны AB. С этой целью решим систему уравнений, составленную из уравнений прямых CD и AB:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 3 = 0, \\ 3x + 4y - 21 = 0. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Умножая первое уравнение системы (1.5) на 4, а второе на 3 и складывая результаты, получим $25x - 75 = 0$, то есть $x = 3$. Теперь нетрудно найти значение y из любого уравнения системы (1.5): $y = 3$. Таким образом, координаты точки D найдены: $D(3;3)$. Отсюда по формуле (1.1) вычисляем длину высоты CD:

$$\underline{d = CD = \sqrt{(3-9)^2 + (3-11)^2} = 10}.$$

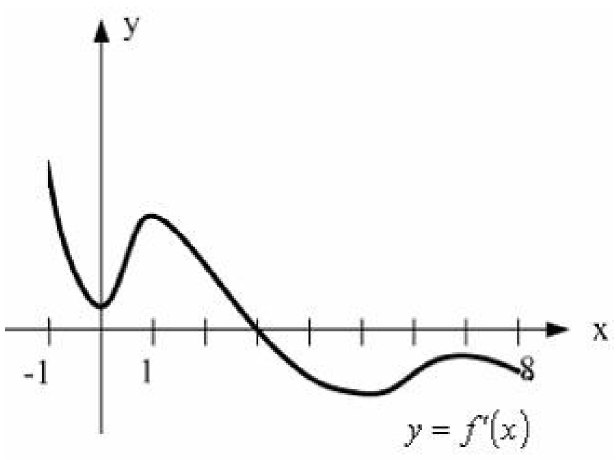


5. Площадь любого треугольника, как известно, равна произведению половины длины его основания на высоту, которая опущена на это основание, поэтому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75 \text{ (ед.кв.)}.$$

Тема 2. Начала анализа. Дифференциальное исчисление функции одного аргумента



ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 2

ЗАДАЧА 2.1. Найти первые производные функций из приведенных ниже таблиц.

ТАБЛИЦЫ ФУНКЦИЙ

Вариант 1

1. $y=3x^3-6\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{x}+5$	6. $y=(x^4-3)\cdot\sin\ln x$
2. $y=\left(x^3+2\right)\cdot e^{\cos x}$	7. $y=\cos^9(1-x)$
3. $y=\frac{\operatorname{arctg}2x}{3-5x^2}$	8. $y=\frac{2+\operatorname{tg}x}{\arccos\sqrt{x}}$
4. $y=\ln\sqrt{3x^2+2}$	9. $y=\operatorname{ctg}\frac{3x-5}{7}$
5. $y=9^{\arcsin x}$	10. $y=\sin^2\ln\sqrt{x}$

Вариант 2

1. $y=3x-4\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}-2$	6. $y=\cos 3x\cdot e^{5x}$
2. $y=\frac{1-\cos 3x}{x^2}$	7. $y=\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{5}}$
3. $y=\frac{\sin 5x}{\arcsin 3x}$	8. $y=\frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$
4. $y=\left(5x^3-7x\right)^4$	9. $y=e^{x\cdot\ln x}$
5. $y=\ln\operatorname{ctg}2x$	10. $y=\sqrt[5]{x^4}\cdot\operatorname{arctg}^6 x$

Вариант 3

1. $y=3x^3-2\sqrt[5]{x^2}+\frac{4}{x^6}+7$	6. $y=2^{\arcsin\frac{1}{x}}$
2. $y=\left(x^5+3\right)\cdot e^{\sin x}$	7. $y=\ln\sqrt{3x^3+4}$
3. $y=\frac{\operatorname{arctg}3x}{1+9x^2}$	8. $y=\frac{\sin^2 x}{\operatorname{arcctg}x^2}$

4. $y=\ln\dfrac{e^{2x}}{3+e^{2x}}$	9. $y=\arccos\dfrac{x-2}{3}$
5. $y=2\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)$	10. $y=3^{\cos^3 x-2\cos x}$

Вариант 4

1. $y=x^2-5\sqrt[7]{x^2}+\dfrac{4}{x}-7$	6. $y=\left(x^4+2\right)\cdot\cos^2 x$
2. $y=\ln\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$	7. $y=\dfrac{x^2}{\arccos^2 x}$
3. $y=\dfrac{\arcsin 2x}{x^3+e^x}$	8. $y=2^{\sin x}\cdot\operatorname{tg}(x-1)$
4. $y=\left(x^3-\operatorname{arctg} x\right)^3$	9. $y=\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{3x^2-2x+1}$
5. $y=e^{\sin x+1}$	10. $y=2^{\cos x^3}$

Вариант 5

1. $y=4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+5\sqrt[5]{x^3}+16$	6. $y=\sin 2x\cdot\arccos\dfrac{x}{2}$
2. $y=\left(1+9x^2\right)\cdot\operatorname{arctg} 3x$	7. $y=3e^{\sqrt{x}\cdot\operatorname{tg} x}$
3. $y=\dfrac{\arcsin 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$	8. $y=\ln\dfrac{e^x}{1-e^x}$
4. $y=\dfrac{\operatorname{ctg} 3x}{\cos^3 x}$	9. $y=\left(x^3-\dfrac{1}{x}\right)^5$
5. $y=\ln\sqrt[3]{x^3+2x^2-x}$	10. $y=2^{\operatorname{ctg} x}\cdot\sin\ln x$

Вариант 6

1. $y=x^5-5\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x^3}+1$	6. $y=7^{\frac{\sin x}{1-x}}$
2. $y=\left(x^7-2\right)\cdot e^{4x}$	7. $y=\sin\left(x+\cos x\right)$
3. $y=\ln\operatorname{tg} 8x$	8. $y=\operatorname{arcctg}^5 x$

4. $y=\dfrac{\arccos 6x}{\sqrt{1-4x^3}}$	9. $y=\sqrt[3]{\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}}$
5. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{3x}$	10. $y=\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}(1-3x)$

Вариант 7

1. $y=6x^3-\dfrac{2}{x}+3\sqrt[3]{x}+6$	6. $y=\dfrac{\ln x}{\cos^3 x}$
2. $y=\dfrac{1+16x^2}{\operatorname{arctg}4x}$	7. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}3x$
3. $y=\ln\sqrt{5x^3-3}$	8. $y=\arccos(2x^2+1)$
4. $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}$	9. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2x^4}{1+x^6}$
5. $y=\operatorname{ctg}5x\cdot e^{6x}$	10. $y=2^{\arcsin x}$

Вариант 8

1. $y=x^7-4\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{2}{x}-7$	6. $y=\cos^4 x\cdot\sin\dfrac{x}{2}$
2. $y=\left(x^3+4\right)\cdot e^{8x}$	7. $y=5^{\operatorname{ctg}x}$
3. $y=\arcsin 5x\cdot\sqrt{2-25x^2}$	8. $y=\left(x^4-3\right)^{10}$
4. $y=\operatorname{tg}\ln 3x$	9. $y=2x\cdot\operatorname{tg}2x+\ln\arccos x$
5. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}x^3}{x^3}$	10. $y=\dfrac{x\cdot 2^x}{\sin^2 x}$

Вариант 9

1. $y=x^3-\dfrac{3}{x^2}+2\sqrt[3]{x}-4$	6. $y=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$
2. $y=\ln\sqrt{4x^5+3x-3}$	7. $y=2e^x\cdot\sin^2 x$
3. $y=\left(1+4x^2\right)\cdot\operatorname{arctg}2x$	8. $y=\ln^3 x-3\ln^2 x+6$

4. $y=\dfrac{\sin 4x+1}{\cos 4x+1}$	9. $y=\dfrac{\arccos(3-x)}{\sin 3x}$
5. $y=\arcsin e^{x}$	10. $y=2^{\cos x}\cdot \operatorname{ctg}^3 x$

Вариант 10

1. $y=3x^5+3\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{x}+2$	6. $y=\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{3}$
2. $y=\dfrac{2-\operatorname{tg}3x}{2+\sqrt{x}}$	7. $y=\dfrac{1}{3}\sin^3 x+\dfrac{3}{5}\ln x^2$
3. $y=\ln\cos 3x$	8. $y=e^{\sqrt[4]{x}}\cdot \operatorname{arctg} x$
4. $y=\left(x^2+5\right)\cdot\sin 5x$	9. $y=(x^3+5)\cdot 4^{\operatorname{tg} x}$
5. $y=\arcsin\dfrac{2x^3}{1+x^2}$	10. $y=\dfrac{\cos\ln x}{x^2}$

Вариант 11

1. $y=x^5-\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{x^2}-1$	6. $y=\cos^4 x\cdot\cos 0,25x$
2. $y=\left(x^4-6\right)\cdot\sin 3x$	7. $y=e^{x\cdot\ln x}$
3. $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2+e^x}$	8. $y=\dfrac{\arccos^2 x}{\ln\sqrt[4]{x}}$
4. $y=(x^4-\operatorname{arcctg} x)^6$	9. $y=\arcsin\sqrt{2-3x^4}$
5. $y=5^{\operatorname{ctg}2x}$	10. $y=\operatorname{tg}\left(5x-1\right)^3$

Вариант 12

1. $y=3x^5+7\sqrt[5]{x^4}-\dfrac{1}{x^4}-8$	6. $y=\cos^3 x-\sin\dfrac{x}{3}$
2. $y=\dfrac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}$	7. $y=\dfrac{x\cdot\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$
3. $y=\left(x^5-16\right)\cdot e^{\sin x}$	8. $y=4x\cdot\operatorname{tg}4x+\cos\ln x$
4. $y=\ln\operatorname{ctg} x$	9. $y=(x^6+6)^7\cdot\sqrt[3]{5-x}$
5. $y=\operatorname{arcctg}\sqrt[4]{x}$	10. $y=3^{\arcsin x}$

Вариант 13

1. $y=3x^4+\dfrac{4}{x^2}+3\sqrt[3]{x}+1$	6. $y=\ln\sqrt{4x^3-5}$
2. $y=\dfrac{\operatorname{tg}2x+1}{\operatorname{tg}2x-1}$	7. $y=3e^x\cdot\arccos^3 x$
3. $y=\left(1-3x^2\right)\cdot\operatorname{arcctg}3x$	8. $y=\ln^2 x-3\sqrt[3]{\ln x}$
4. $y=\dfrac{\arcsin\frac{x}{2}}{\cos 4x}$	9. $y=\sin\dfrac{2^x}{\sqrt{x}}$
5. $y=\operatorname{arctg}e^{-x}$	10. $y=4^{\operatorname{ctg}x}\cdot\log_5 x$

Вариант 14

1. $y=x^3+8\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{1}{x}+9$	6. $y=e^{x^2\cdot\cos x}$
2. $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}x^3}{\sqrt{x}+e^x}$	7. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{\ln x}$
3. $y=\left(x^8+8\right)\cdot\cos 4x$	8. $y=\sin\left(3x+2\right)^7$
4. $y=(x^4+\arccos x)^7$	9. $y=\arcsin\left(2^x\right)$
5. $y=4^{\operatorname{tg}3x}$	10. $y=\operatorname{tg}^6 x+\ln\sqrt{1-x^6}$

Вариант 15

1. $y=x^3+8\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{1}{x}+9$	6. $y=e^{x^2\cdot\cos x}$
2. $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}x^3}{\sqrt{x}+e^x}$	7. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{\ln x}$
3. $y=\left(x^8+8\right)\cdot\cos 4x$	8. $y=\sin\left(3x+2\right)^7$
4. $y=(x^4+\arccos x)^7$	9. $y=\arcsin\left(2^x\right)$
5. $y=4^{\operatorname{tg}3x}$	10. $y=\operatorname{tg}^6 x+\ln\sqrt{1-x^6}$

Вариант 16

1. $y=5x^4+2\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{3}{x^3}+2$	6. $y=\left(\cos^2 x-e^{\cos x}\right)^3$
2. $y=\dfrac{5-\sqrt{3x}}{5+\sqrt{3x}}$	7. $y=\dfrac{\operatorname{tg}(2-3x)}{\ln x}$
3. $y=\ln\sin 8x$	8. $y=\ln(x+\operatorname{ctg}2x)$
4. $y=\left(x^3+2\right)\cdot\sin 7x$	9. $y=\cos\sqrt{x}\cdot e^x+x^9$
5. $y=8^{\operatorname{arctg}2x}$	10. $y=\arcsin\dfrac{x}{4}\cdot\arccos x^2$

Вариант 17

1. $y=x^4+\dfrac{2}{x^3}-3\sqrt[3]{x^2}-3$	6. $y=\sin^4 3x$
2. $y=\ln\sqrt{4x-3x^5}$	7. $y=3^{\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{ctg}6x$
3. $y=(1+4x^2)\cdot\operatorname{arctg}x^3$	8. $y=\left(\sqrt[3]{\sin x}+3\sin x\right)^5$
4. $y=\dfrac{\cos 2x+1}{\sin 2x+1}$	9. $y=\dfrac{4-5x}{\sqrt{x^2-3x-4}}$
5. $y=2^{\arccos x}$	10. $y=e^{\sqrt{x}}+\arcsin(1-x)$

Вариант 18

1. $y=x^6-5\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+4$	6. $y=3^{x\cdot\sin x}$
2. $y=\left(x^3+2\right)\cdot e^{5x}$	7. $y=\arcsin x^2+\sqrt[3]{2-x^6}$
3. $y=\ln\sin 6x$	8. $y=\cos(x^7+2^x)$
4. $y=\dfrac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}$	9. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$
5. $y=\sin 2x\cdot\operatorname{arcctg}7x$	10. $y=\operatorname{tg}\ln^9 x$

Вариант 19

1. $y=4x^5-\dfrac{5}{x}+5\sqrt[3]{x}+3$	6. $y=\dfrac{1}{3}\sin\ln x-\dfrac{2}{5}\cos 2x$

2. $y=\dfrac{1+x^6}{\operatorname{arctg} 7x}$	7. $y=\dfrac{6+\sqrt{7x}}{6-\sqrt{7x}}$
3. $y=\ln\sqrt{5x^3+2x^2-3}$	8. $y=\left(\operatorname{ctg} 2x-\arcsin x\right)^3$
4. $y=e^{\operatorname{tg} x}\cdot\log_5 x$	9. $y=\arccos(\sin x)$
5. $y=5^{\cos^2 x}$	10. $y=\ln(1+e^x)-\operatorname{ctg} 2^x$

Вариант 20

1. $y=3x^6+5\sqrt[3]{x}-\dfrac{4}{x}+1$	6. $y=3^{\arccos x}$
2. $y=\cos 5x\cdot e^{5x}$	7. $y=\operatorname{arcctg}^4 x+\sqrt[4]{2-x^6}$
3. $y=\ln\operatorname{tg} 6x$	8. $y=(x^7+2^x)^9$
4. $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+5x^2}}$	9. $y=\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin 9x$
5. $y=\operatorname{arctg}\sin x$	10. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[4]{1-e^x}$

Вариант 21

1. $y=3x^2-\dfrac{5}{\sqrt[4]{x}}+5\sqrt{x}-3$	6. $y=\arcsin\sqrt[3]{x}$
2. $y=\dfrac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$	7. $y=\dfrac{\cos^4 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$
3. $y=(1+x^3)\cdot\operatorname{arctg} 3x$	8. $y=\left(2x-\operatorname{arcctg} x\right)^3$
4. $y=\ln\ln x$	9. $y=x^2\cdot\sin 2x+2x\cdot\cos\dfrac{x}{2}$
5. $y=5^{\sin x}$	10. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\sqrt{x}-\ln\operatorname{ctg} x$

Вариант 22

1. $y=4x^3-6\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{4}{x^4}+1$	6. $y=\arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$
2. $y=(x^4+1)\cdot e^{\cos x}$	7. $y=3^{\sin^2 x}$

3. $y=\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{1-4x^2}$	8. $y=\cos\left(6x-\dfrac{1}{x}\right)$
4. $y=\ln\sqrt{4x^3-3x^2+3x}$	9. $y=\left(\sin x^2-e^{6x}\right)^8$
5. $y=\arcsin\ln x$	10. $y=3x^3\cdot\operatorname{arcctg}^3 x-\operatorname{ctg}\sqrt{x}$

Вариант 23

1. $y=x^8-\dfrac{5}{x}+5\sqrt[5]{x^4}-3$	6. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}}$
2. $y=(x^7+32)\cdot\sin 2x$	7. $y=\operatorname{ctg}(x^2\cdot\operatorname{tg} x)$
3. $y=\dfrac{\arcsin 5x}{x^3+e^x}$	8. $y=\ln(x^5+6)-\ln\dfrac{x}{5}$
4. $y=(x^7-\operatorname{arcctg} x)^8$	9. $y=2-e^{\cos x}\cdot\operatorname{tg}^3 x$
5. $y=5^{\arccos x}$	10. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{2x+7}{5}$

Вариант 24

1. $y=5x^6+4\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{3}{x^3}+2$	6. $y=10^{x^2-x+4}$
2. $y=(x^3+2)\cdot\sin 8x$	7. $y=\cos(3^x-3^{-x})$
3. $y=\dfrac{5-\cos 5x}{5+\cos 5x}$	8. $y=\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin\sqrt{x}}$
4. $y=\arccos^5 x$	9. $y=(\sin\ln x)\cdot e^{x^3}$
5. $y=\ln\operatorname{tg} 8x$	10. $y=(\operatorname{ctg}^2 x)\cdot\sqrt{2-x}$

Вариант 25

1. $y=x^4-3\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{3}{x^2}+3$	6. $y=\arcsin^6 x$
2. $y=\left(1+4x^2\right)\cdot\operatorname{arctg} 2x$	7. $y=\operatorname{tg}(3x-1)^4$
3. $y=\dfrac{\sin 2x+4}{\cos 2x+4}$	8. $y=e^{2x}-\arccos e^x$
4. $y=\ln\sqrt{3x^3+4x^2-2}$	9. $y=\ln\dfrac{3-x^2}{3+x^2}$

5. $y = 3^{\sin^3 x}$	10. $y = (x-4)\cdot\log_5 x^3$

Вариант 26

1. $y = x^4 + 4\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + 2$	6. $y = \operatorname{tg} 2x + \dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 2x$
2. $y = (x^4 + 3)\cdot\sin 2x$	7. $y = \operatorname{ctg}^4 x$
3. $y = \dfrac{\arcsin 3x}{x^3 + e^x}$	8. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$
4. $y = (x^3 - \operatorname{arcctg} x)^4$	9. $y = \log_7(2-3x^2)\cdot\ln\dfrac{2x+1}{4}$
5. $y = 5^{3x^2+\sqrt{x}}$	10. $y = e^{-x} + \arccos e^x$

Вариант 27

1. $y = 4x^2 + 4\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}} + 2$	6. $y = \dfrac{\sin 2x}{\arccos x^3}$
2. $y = (1+9x^2)\cdot\operatorname{arctg} 3x$	7. $y = e^{1-3x}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$
3. $y = \dfrac{\arcsin 5x}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{\ln x}{\sqrt{5}}$
4. $y = \ln\cos 3x$	9. $y = 6^x\cdot\cos^3 x$
5. $y = 6^{x-\sqrt[3]{x}}$	10. $y = (6 - \operatorname{ctg} e^x)^4$

Вариант 28

1. $y = 3x - 5\sqrt[3]{x} + \dfrac{8}{x^4} + 5$	6. $y = \ln((x+2)\cdot e^{2x})$
2. $y = (\cos 2x)\cdot e^{8x}$	7. $y = \arcsin\operatorname{tg} x$
3. $y = \dfrac{4x}{\sqrt{9-5x^3}}$	8. $y = \dfrac{2}{1+e^x}\cdot\cos^2 x$
4. $y = \ln\sin 2x$	9. $y = (2x^5 - 7)^6\cdot\operatorname{arctg} x$
5. $y = \operatorname{ctg}(4 - x^4)$	10. $y = 5^{x+2\sqrt{x}}$

ЗАДАЧА 2.2. Провести анализ и построить графики заданных функций $y = f(x)$

Вариант	$f(x)$	
	а)	б)
1	$2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$	$\dfrac{x-1}{x+1}$
2	$x^3 - 6x^2 + 9x - 1$	$\dfrac{x+1}{x-1}$
3	$x^3 - 3x^2 - 9x + 10$	$\dfrac{x-2}{x+2}$
4	$x^3 + 6x^2 + 9x + 2$	$\dfrac{x+2}{x-2}$
5	$x^3 + 6x^2 + 9x + 2$	$\dfrac{x-3}{x+3}$
6	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$	$\dfrac{x+3}{x-3}$
7	$2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$	$\dfrac{x-4}{x+4}$
8	$2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$	$\dfrac{x+4}{x-4}$
9	$2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$	$\dfrac{x-5}{x+5}$
10	$2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$	$\dfrac{x+5}{x-5}$
11	$2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$	$\dfrac{x-1}{x+2}$

12	$2x^3+15x^2+36x+32$	$\frac{x+2}{x-1}$
13	$2x^3-15x^2+24x+4$	$\frac{x-2}{x+1}$
14	$2x^3-9x^2-24x+61$	$\frac{x+1}{x-2}$
15	$x^3+9x^2-24x-56$	$\frac{x-3}{x+2}$
16	$2x^3+15x^2+24x-2$	$\frac{x+2}{x-3}$
17	$x^3-9x^2+24x-18$	$\frac{x-2}{x+3}$
18	$x^3-3x^2-24x+26$	$\frac{x+3}{x-2}$
19	$x^3+3x^2-24x-21$	$\frac{x-4}{x+1}$
20	$x^3+9x^2+24x+17$	$\frac{x+2}{x-4}$
21	$2x^3-21x^2+72x-69$	$\frac{x-2}{x+4}$
22	$2x^3-3x^2-72x+37$	$\frac{x+4}{x-2}$
23	$2x^3+3x^2-72x-35$	$\frac{x-3}{x+4}$
24	$2x^3+21x^2+72x+90$	$\frac{x+4}{x-3}$
25	$x^3-9x^2+15x+10$	$\frac{x-5}{x+1}$

26	$x^3-6x^2-15x+41$	$\dfrac{x+5}{x-1}$
27	$x^3+6x^2-15x-43$	$\dfrac{x-1}{x+6}$
28	$x^3+9x^2+15x-9$	$\dfrac{x+7}{x-2}$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ

ПРИМЕР 1. Провести анализ и построить графики функций:

$$\text{I. } y=\frac{1}{4}(x^3+9x^2+15x-9). \text{ II. } y=\frac{x+1}{x+3}. \text{ III. } y=\frac{x^2+20}{x-4}.$$

Решение.

I. $y=\dfrac{1}{4}(x^3+9x^2+15x-9)$.

1. Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x, то есть

$$D(y)=\{x|\ x\in(-\infty;\ +\infty)\}.$$

2. Функция непрерывна на всей числовой прямой, поэтому ее график не имеет вертикальных асимптот.

Выясним наличие у графика заданной функции наклонных асимптот. Для определения параметров уравнения асимптоты $y=kx+b$ воспользуемся формулами

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; \quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Имеем

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(x^3+9x^2+15x-9\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4}\left(x^2+9x+15-\frac{9}{x}\right)=\infty.$$

Таким образом, у графика заданной функции наклонных асимптот нет.

3. Исследуем функцию на экстремумы и интервалы монотонности. С этой целью найдем ее производную и приравняем к нулю: $y' = \dfrac{1}{4}(3x^2 + 18x + 15);\quad x^2 + 6x + 5 = 0.$

Решая полученное квадратное уравнение, делаем вывод о том, что функция имеет две критические точки первого рода $x_1 = -5, x_2 = -1$.

Разбиваем область определения этими точками на части и по изменению в них знака производной функции выявляем промежутки ее монотонности и наличие экстремумов:

x	$(-\infty;-5)$	-5	$(-5;-1)$	-1	$(-1;-\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\max} = y(-5) = \frac{1}{4}\left[(-5)^3 + 9(-5)^2 + 15(-5) - 9\right] = 4;$$

$$y_{\min} = y(-1) = \frac{1}{4}\left[(-1)^3 + 9(-1)^2 + 15(-1) - 9\right] = -4.$$

4. Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости. Для этого найдем вторую производную заданной функции и приравняем ее к нулю:

$$y'' = \frac{1}{4}(6x + 18);\ x + 3 = 0,\ \Rightarrow\ x = -3.$$

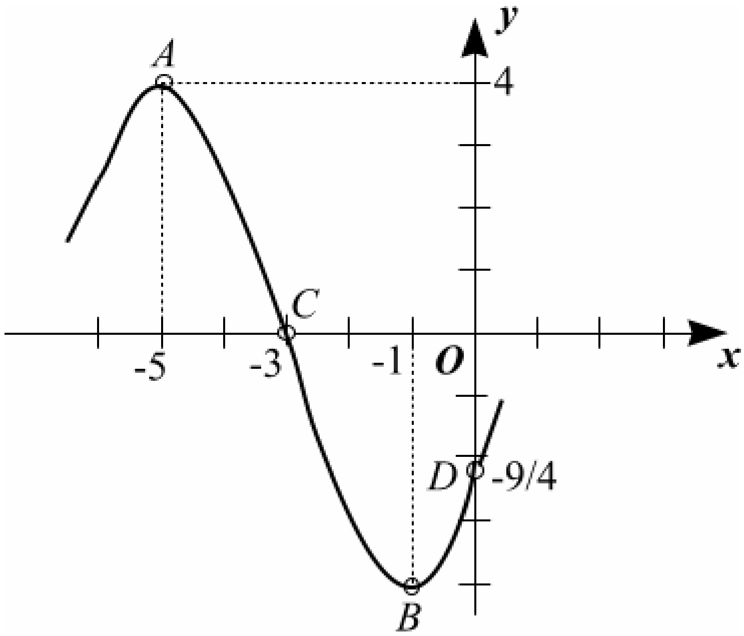
Итак, функция имеет одну критическую точку второго рода $x = -3$. Разобьем область определения полученной точкой на части, в каждой из которых установим знак второй производной:

x	$(-\infty;\ -3)$	-3	$(-3;\ +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	т.п.	$\smile$

Значение $x = -3$ является абсциссой точки перегиба графика функции, а ордината этой точки

$$y_{ò.ï.} = y(-3) = \frac{1}{4}\left[(-3)^3 + 9(-3)^2 + 15(-3) - 9\right] = 0.$$

5. Для построения графика в выбранной системе координат изобразим точки максимума $A(-5;\ 4)$, минимума $B(-1;-4)$, перегиба $C(-3;\ 0)$, и точку $D(0;\ -9/4)$ пересечения графика с осью Oy. С учетом результатов предыдущих исследований построим кривую:



II. $y = \dfrac{x+1}{x+3}$.

1. Область определения.

$$D(y) = \left\{ x \middle| x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty) \right\}.$$

2. Исследование на непрерывность и асимптоты.

Заданная функция непрерывна всюду, кроме точки $x = -3$. Вычислим ее односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x \to -3-0} f(x) = \lim_{x \to -3-0} \frac{x+1}{x+3} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to -3+0} f(x) = \lim_{x \to -3+0} \frac{x+1}{x+3} = -\infty.$$

Итак, точка $x = -3$ – точка разрыва второго рода заданной функции, а прямая $x = -3$ – вертикальная асимптота графика.

Исследуем график на наличие наклонных асимптот.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x\cdot(x+3)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+3}=1.$$

Таким образом, прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой графика.

3. Исследование на экстремум и промежутки монотонности.

$$y'=\frac{x+3-x-1}{(x+3)^2}=\frac{2}{(x+3)^2}.$$

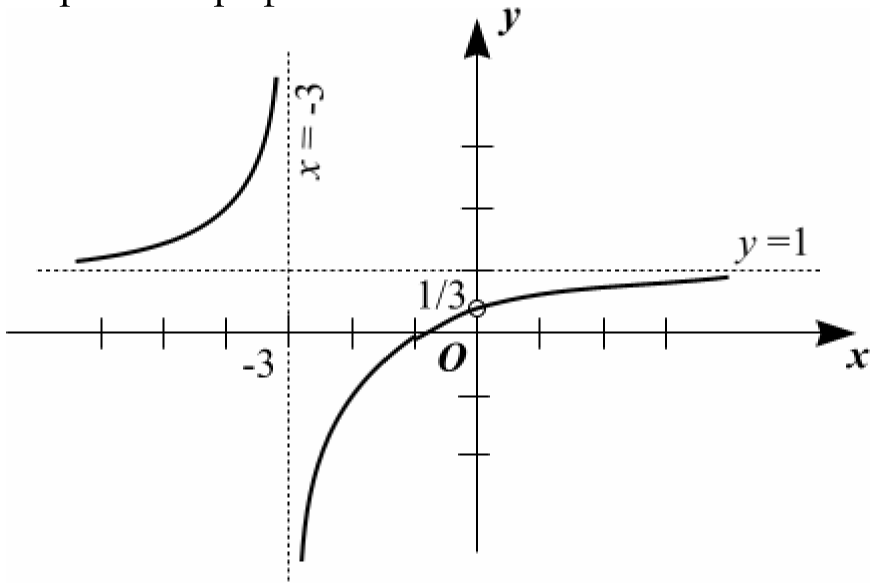
Поскольку $\dfrac{2}{(x+3)^2}\neq 0,$ то функция не имеет точек экстремума. Так как $y'>0$ для всех точек из $D(y)$, то функция возрастает во всей области определения.

4. Исследование графика на выпуклость, вогнутость, точки перегиба. $y''=\left(2(x+3)^{-2}\right)''=-4(x+3)^{-3}=-4/(x-3)^3$.

Поскольку $y''\neq 0$, график не имеет точек перегиба.

Очевидно, что при $x<-3$ $y''>0$, а при $x>-3$ $y''<0$. Следовательно, график функции вогнутый при $x\in(-\infty,-3)$ и выпуклый при $x\in(-3,+\infty)$.

5. Построение графика.



ТЕМА 3. Интегральное исчисление

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 3

ЗАДАЧА 3.1.

I. Вычислить неопределенные интегралы.

II. Вычислить определенные интегралы.

Вариант 1

I.	
1. $\int (x^2+2x+\frac{1}{x})dx$	2. $\int \frac{3x^7-1}{x^2}dx$
3. $\int \cos(3-2x)dx$	4. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$
5. $\int e^{2-7x}dx$	6. $\int x\cdot e^{x^2}dx$
7. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	8. $\int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$
9. $\int (1-x)\cdot\cos(3-7x)dx$	10. $\int \mathrm{arctg}\,2x dx$
II.	
1. $\int_1^2 (3-x^3)dx$	2. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{5x+1}}$

Вариант 2

I.	
1. $\int (3x-x^4+2x^{0,2})dx$	2. $\int (2+\frac{\sqrt[3]{x}}{3}-\frac{5}{\sqrt{x}})dx$
3. $\int \cos(1+\frac{x}{2})dx$	4. $\int \sin(4-3x)dx$
5. $\int \frac{x^2}{3x^3+4}dx$	6. $\int x^2\cdot e^{-x^3}dx$
7. $\int \mathrm{tg}(2x+1)dx$	8. $\int 5^{\sin x}\cdot\cos x dx$
9. $\int (2-3x)\cdot\sin 5x dx$	10. 20. $\int x^2\cdot\ln 3x dx$
II.	
1. $\int_{-1}^1 (4+x^2)dx$	2. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{3x^3+1}}dx$

Вариант 3

I.	
1. $\int (x^3 + 3x + \frac{4}{x})dx$	2. $\int (\frac{4}{x^3} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x}} + 4)dx$
3. $\int \sin(3-2x)dx$	4. $\int \cos\frac{x-3}{4}dx$
5. $\int \frac{1}{5-3x}dx$	6. $\int \sin 5x \cdot e^{\cos 5x+3}dx$
7. $\int \frac{x^4}{3-2x^5}dx$	8. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$
9. $\int (x+2)\cdot e^{2x-7}dx$	10. $\int (2-7x)\cdot\cos(4x+3)dx$
II.	
1. $\int_1^2 (1+2x^3)dx$	2. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x}}$

Вариант 4

I.	
1. $\int (3x^5 - 5x^{0,5} - \frac{3}{x})dx$	2. $\int (4 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{\sqrt[6]{x^5}})dx$
3. $\int \cos(2x-11)dx$	4. $\int \sin(3+\frac{x}{3})dx$
5. $\int 2^{7-3x}dx$	6. $\int \sin^3 x\cdot\cos x dx$
7. $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3)}dx$	8. $\int x^3\cdot\sqrt{3x^4+1}dx$
9. $\int (1-3x)\cdot\sin(8-3x)dx$	10. $\int x^7\cdot\ln 5x dx$
II.	
1. $\int_0^1 (5x^4+1)dx$	2. $\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx$

Вариант 5

I.	
1. $\int (2x^4 - 3x^{-0,3} + 4)dx$	2. $\int (\sqrt{x} + \frac{2}{3\sqrt[4]{x^3}} - 1)dx$
3. $\int \sin(\frac{x}{7} - 7)dx$	4. $\int (3x+2)^5 dx$

5. $\int \cos(3-4x)dx$	6. $\int x^3 \cdot e^{-3x^4} dx$
7. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$	8. $\int x^4 \cdot \sqrt{2x^5+3}dx$
9. $\int (3-8x)\cdot \cos 2xdx$	20. $\int (x-2)\cdot e^{1-3x}dx$
II.	
1. $\int\limits_0^1 (x+2)^2 dx$	2. $\int\limits_0^{0,5} \frac{xdx}{1+4x^2}$

Вариант 6

I.	
1. $\int (3x^4-4x+\frac{1}{x})dx$	2. $\int (3-\sqrt[3]{x}+\frac{2}{3\sqrt[5]{x^2}})dx$
3. $\int \cos(1+\frac{x}{4})dx$	4. $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-1)}$
5. $\int \sin(4-3x)dx$	6. $\int \frac{x}{8+x^2}dx$
7. $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$	8. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x+1}}dx$
9. $\int (x-2)\cdot \sin(2x+3)dx$	10. $\int x^3 \cdot \ln 2xdx$
II.	
1. $\int\limits_{-1}^{1} (x^3-2x)dx$	2. $\int\limits_{-1}^{4} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}}$

Вариант 7

I.	
1. $\int (6x^5-5x+\frac{2}{x})dx$	2. $\int (3\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{5x^3}+1)dx$
3. $\int \sin(5-2x)dx$	4. $\int (2-8x)^{10} dx$
5. $\int \cos(\frac{x}{3}+3)dx$	6. $\int \cos^5 x \cdot \sin xdx$
7. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$	8. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x^2}$
9. $\int (7x+3)\cdot \cos 3xdx$	10. $\int (1-8x)\cdot e^{2x+13}dx$

II.	
1. $\int_{1}^{2}(4+x^2)dx$	2. $\int_{0}^{1}x^2\cdot e^{x^3}dx$

Вариант 8

I.	
1. $\int(5x^6-3x+\frac{1}{x})dx$	2. $\int(\sqrt[7]{x^4}-\frac{2}{3\sqrt{x}}-2)dx$
3. $\int\cos(1-\frac{x}{2})dx$	4. $\int\sin(2x+4)dx$
5. $\int(5x+3)^9dx$	6. $\int x^3\cdot e^{x^4}dx$
7. $\int(5+2\sin x)^7\cdot\cos xdx$	8. $\int\frac{4^{\arccos x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $\int(x+2)\cdot\sin 6xdx$	10. $\int x^7\cdot\ln 2xdx$
II.	
1. $\int_{1}^{3}(4-x^2)dx$	2. $\int_{0}^{\sqrt{5}}x\cdot\sqrt{x^2+4}dx$

Вариант 9

I.	
1. $\int(7x^4-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x})dx$	2. $\int(\sqrt[4]{x}+\frac{2}{5\sqrt[4]{x^3}}-2)dx$
3. $\int\cos(2-\frac{x}{2})dx$	4. $\int\frac{dx}{4x-3}$
5. $\int\frac{dx}{4x-3}$	6. $\int\frac{xdx}{2+3x^2}$
7. $\int\frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$	8. $\int\frac{3-\mathrm{ctg}^3 x}{\sin^2 x}dx$
9. $\int(2x+7)\cdot\cos(3x+1)dx$	10. $\int(2-3x)\cdot e^{2x}dx$
II.	
1. $\int_{1}^{3}(2x-x^2)dx$	2. $\int_{0}^{1}\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

Вариант 10

I.	
1. $\int (6x^7 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$	2. $\int (\frac{\sqrt[3]{x}}{5} - \frac{2}{7\sqrt[4]{x^3}} + 4)dx$
3. $\int \sin(1-2x)dx$	4. $\int \frac{dx}{\sin^2(4-3x)}$
5. $\int \frac{dx}{(3x-2)^7}$	6. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x - 6}}{\cos^2 x}dx$
7. $\int \arcsin^6 x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$
9. $\int (x-4)\cdot \sin 3x dx$	10. $\int x^6 \cdot \ln 8x dx$
II.	
1. $\int\limits_1^2 (x^3 + \frac{1}{x^2})dx$	2. $\int\limits_0^1 x \cdot e^{x^2+1}dx$

Вариант 11

I.	
1. $\int (7x^5 - \frac{4}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})dx$	2. $\int (2\sqrt[7]{x^5} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 1)dx$
3. $\int \sin(5-2x)dx$	4. $\int \frac{dx}{3-11x}$
5. $\int (5x+9)^9 dx$	6. $\int \frac{x}{\sqrt{5+x^2}}dx$
7. $\int e^{x^3+5} \cdot x^2 dx$	8. $\int \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$
9. $\int (6x+1)\cdot \cos(2-5x)dx$	10. $\int (x-2)\cdot e^{6x}dx$
II.	
1. $\int\limits_1^2 x^2 \cdot (1-x)dx$	2. $\int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+2}dx$

Вариант 12

I.	
1. $\int (4 - x^3 + \frac{2}{x})dx$	2. $\int (5\sqrt[6]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 7)dx$

3. $\int 3^{4-5x}dx$	4. $\int \cos(3-2x)dx$
5. $\int \frac{dx}{(2x+5)^5}$	6. $\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^3}dx$
7. $\int \sin^5 x \cdot \cos x dx$	8. $\int e^{\operatorname{ctg} x-4} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$
9. $\int (x+7)\cdot\cos(2-5x)dx$	10. $\int (6x+1)\cdot e^{3x+4}dx$
II.	
1. $\int_1^2 x\cdot(1-\frac{2}{x^3})^2 dx$	2. $\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$

Вариант 13

I.	
1. $\int (x^3 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x})dx$	2. $\int (\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5\sqrt[4]{x^3} + 3)dx$
7. $\int \cos(5x-3)dx$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2(7x-9)}$
10. $\int \frac{1}{3-2x}dx$	12. $\int x^2 \cdot \sqrt[4]{1-x^3}dx$
13. $\int e^{2+\operatorname{tg} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$	17. $\int \frac{\ln^7 x}{x}dx$
19. $\int (x-3)\cdot\sin(2-3x)dx$	. 21. $\int x^5 \cdot \ln 5x dx$
II.	
1. $\int_2^3 \frac{3-2x}{x^2}dx$	2. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

Вариант 14

I.	
1. $\int (5x^4 - 3x^{-2} + \frac{1}{x})dx$	2. $\int (1-\sqrt[5]{x^4} + \frac{4}{\sqrt{x}})dx$
3. $\int \sin(5-\frac{x}{4})dx$	4. $\int \frac{dx}{(3-2x)^5}$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-4)}$	6. $\int \frac{\sqrt[3]{2-\ln x}dx}{x}$

7. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x - 4}} dx$	8. $\int \frac{(2-\operatorname{arctg} x)^4 dx}{1+x^2}$
9. $\int (x+2)\cdot \sin(3-5x) dx$	10. $\int x^8 \cdot \ln 9x dx$
II.	
1. $\int_1^4 (x^3 - \sqrt{x}) dx$	2. $\int_1^3 \sqrt{1+x} dx$

Вариант 15

I.	
1. $\int (\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3x} + \frac{2}{x^2}) dx$	2. $\int (3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}} + 1) dx$
3. $\int \sin(4-x) dx$	4. $\int \cos(\frac{x}{4} + 3) dx$
5. $\int x^5 \cdot \sqrt{4-x^6} dx$	6. $\int (8x+7)^5 dx$
7. $\int \frac{\ln^7 5x}{x} dx$	8. $\int \cos(x^4+2)\cdot x^3 dx$
9. $\int (1-5x)\cdot \cos(3x+5) dx$	10. $\int (1-5x)\cdot \cos(3x+5) dx$
II.	
1. $\int_1^4 (x^3 - 4x) dx$	2. $\int_0^2 x\cdot 3^{x^2} dx$

Вариант 16

I.	
1. $\int (3x^2 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}) dx$	2. $\int (3\sqrt[4]{x^3} - \frac{6}{5x^3} + 2) dx$
3. $\int \sqrt{3+2x} dx$	4. $\int e^{2-7x} dx$
5. $\int \frac{\ln^4 x dx}{x}$	6. $\int \frac{x^3}{\cos^2(x^4+1)} dx$
7. $\int x^3 \cdot \sqrt[3]{4x^4+1} dx$	8. $\int \frac{e^{1-\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}$
9. $\int (x-4)\cdot \sin(1-2x) dx$	10. $\int x^6 \cdot \ln 2x dx$
II.	

1. $\int_1^4 (\sqrt{x} - 3x)dx$	2. $\int_0^4 \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x}}dx$

Вариант 17

I.	
1. $\int (\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 6x)dx$	2. $\int (4\sqrt[7]{x} - \frac{2}{x^3} + 3)dx$
3. $\int \sin(3 + 5x)dx$	4. $\int \frac{dx}{(2-3x)^2}$
5. $\int \cos\frac{x}{3}dx$	6. $\int x^3 \cdot \sqrt{2x^4 - 7}dx$
7. $\int (2 + \sin x)^9 \cdot \cos x dx$	8. $\int \frac{(2 - \operatorname{arctg} x)^2 dx}{1 + x^2}$
9. $\int (x-1) \cdot \cos 3x dx$	10. $\int (2x+7) \cdot e^{1-4x}dx$
II.	
1. $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4})dx$	2. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Вариант 18

I.	
1. $\int (\frac{x^4}{2} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}})dx$	2. $\int (3\sqrt[5]{x^2} - \frac{7}{\sqrt[3]{x}} + 2)dx$
3. $\int \sin(4 - 3x)dx$	4. $\int \frac{dx}{\sin^2(4x+5)}$
5. $\int \frac{dx}{(2-5x)^3}$	6. $\int \frac{x^2}{x^3 - 3}dx$
7. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{3 - 2\sin x}}dx$	8. $\int \frac{(2 - \operatorname{tg}^2 x)dx}{\sin^2 x}$
9. $\int (x+7) \cdot \sin(3-4x)dx$	10. $\int x^2 \cdot \ln 5x dx$
II.	
1. $\int_{-1}^2 (x^2 - 3)dx$	2. $\int_2^3 \frac{x}{1+x^2}dx$

Вариант 19

I.	
1. $\int (\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3x} + 1)dx$	2. $\int (\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} + 1)dx$
3. $\int \sin(3-2x)dx$	4. $\int \frac{1}{(2x+7)^2}dx$
5. $\int e^{-5x}dx$	6. $\int \frac{x^2dx}{3-x^3}$
7. $\int \frac{(3-\ln x)^6 dx}{x}$	8. $\int x^3 \cdot \sin(2-7x^4)dx$
9. $\int (x+2)\cdot \sin(5x+3)dx$	10. $\int (x+2)\cdot \sin(5x+3)dx$
II.	
1. $\int_1^2 (4-x^3)dx$	2. $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$

Вариант 20

I.	
1. $\int (2x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x})dx$	2. $\int (3\sqrt[4]{x} - \frac{2}{x^5} + 4)dx$
3. $\int \cos(\frac{x}{7}+4)dx$	4. $\int \mathrm{tg}(3x+1)dx$
5. $\int \frac{dx}{(7x+2)^2}$	6. $\int x\cdot\sqrt{2x^2+1}dx$
7. $\int \frac{\cos x \cdot dx}{5-2\sin x}$	8. $\int \frac{\cos x \cdot dx}{5-2\sin x}$
9. $\int (x-1)\cdot e^{1-6x}dx$	10. $\int (2-x)\cdot \cos 5x dx$
II.	
1. $\int_{-1}^{3} (2x-x^2)dx$	2. $\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx$

Вариант 21

I.	
1. $\int (\frac{3}{\sqrt{x}} - 4x^6 + \frac{2}{x^2})dx$	2. $\int (2\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^6} + 1)dx$

3. $\int \cos(7-5x)dx$	4. $\int \frac{dx}{\sin^2(4x+1)}$
. 5. $\int (3x+8)^4 dx$	6. $\int \frac{2-3x^4}{x^5}dx$
7. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$	8. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x-3}}{\cos^2 x}dx$
9. $\int (2x-3)\cdot\sin(3x-5)dx$	10. $\int x^6\cdot\ln 6x dx$
II.	
1. $\int_1^2 (4+x^2)\cdot x dx$	2. $\int_0^{\pi/3} \sin 3x dx$

Вариант 22

I.	
1. $\int (8x^3+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x})dx$	2. $\int (2\sqrt[5]{x^2}-\frac{8}{3x^3}-3)dx$
3. $\int \sin(13-2x)dx$	4. $\int \sqrt{2x-1}dx$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-3x)}$	6. $\int e^{2\operatorname{tg} x-3}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$
7. $\int e^{2\operatorname{tg} x-3}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$	8. $\int \frac{x}{5-3x^2}dx$
9. $\int (3x-7)\cdot e^{2-3x}dx$	10. $\int (4-3x)\cdot\cos(3x+1)dx$
II.	
1. $\int_2^3 (9+\frac{x}{8})dx$	2. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

Вариант 23

I.	
1. $\int (\frac{x^7}{4}-\frac{2}{3\sqrt{x}}+\frac{4}{x})dx$	2. $\int (\frac{5}{x^3}+2\sqrt[4]{x^3}-3)dx$
3. $\int \frac{dx}{2-13x}$	4. $\int \cos(\frac{x}{7}+1)dx$
5. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln x-4}}{x}dx$	6. $\int (7x+2)^{10}dx$
7. $\int x^6\cdot\sqrt{2x^7-3}dx$	8. $\int e^{3-2x^5}\cdot x^4 dx$

9. $\int (2-5x)\cdot sin(7x+3)dx$	10. $\int (4x+1)\cdot e^{6x}dx$
II.	
1. $\int\limits_{-2}^{1}(4x+3)dx$	2. $\int\limits_{0}^{4} e^{x/4}dx$

Вариант 24

I.	
1. $\int (\frac{3x^8}{5}-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2})dx$	2. $\int (3\sqrt[6]{x^5}-\frac{2}{5x^7}-2)dx$
3. $\int \sin(8-3x)dx$	4. $\int (5-4x)^7 dx$
5. $\int e^{5-3x}dx$	6. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-3x^5}}$
7. $\int \frac{3+\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	8. $\int \frac{\ln^5 3x}{x}dx$
9. $\int (5x-1)\cdot\sin(3x-2)dx$	10. $\int x^6\cdot\ln 3x dx$
II.	
1. $\int\limits_{-2}^{2}(x^2-1)dx$	2. $\int\limits_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$

Вариант 25

I.	
1. $\int (\frac{3x^5}{5}-\frac{4}{5x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}})dx$	2. $\int (5\sqrt[6]{x}-\frac{7}{x^3}-5)dx$
3. $\int \frac{dx}{11-x}dx$	4. $\int \sin(12-7x)dx$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2(8x-1)}$	6. $\int \frac{(2-\operatorname{arctg} x)^6}{1+x^2}dx$
7. $\int \frac{\operatorname{tg}^9 x}{\cos^2 x}dx$	8. $\int x^3\cdot\sqrt{x^4+3}dx$
9. $\int (2-7x)\cdot\sin(5x)dx$	10. $\int x^4\cdot\ln 4x dx$
II.	

1. $\int_1^3 (x^3 + x)dx$	2. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$

Вариант 26

I.	
1. $\int (\frac{4}{3\sqrt{x}} - \frac{2}{x} + 6x^5)dx$	2. $\int (4\sqrt[5]{x^2} + \frac{7}{x^5} - 2)dx$
3. $\int \sin(7-6x)dx$	4. $\int \sqrt[3]{3-4x}dx$
5. $\int \frac{dx}{1+2x}$	6. $\int (3-\cos x)^7 \cdot \sin x dx$
7. $\int x^4 \cdot \sqrt{3x^5 - 4}dx$	8. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^3 x \cdot \cos^2 x}$
9. $\int (3+6x) \cdot sin(4x-2)dx$	10. $\int (7x-1) \cdot e^{3-2x}dx$
II.	
1. $\int_1^2 (2x-1)dx$	2. $\int_0^1 x \cdot \sqrt{1+x^2}dx$

Вариант 27

I.	
1. $\int (\frac{5x^4}{2} - \frac{6\sqrt[5]{x^2}}{5} + \frac{3}{x^2})dx$	2. $\int (\frac{3}{\sqrt[7]{x^3}} - \frac{2}{3x} - 4)dx$
3. $\int \cos(3x+4)dx$	4. $\int \mathrm{ctg}(1-4x)dx$
5. $\int \frac{dx}{(8-7x)^3}$	6. $\int \frac{\cos x dx}{3+7\sin x}$
7. $\int \frac{(2+\ln x)^5 dx}{x}$	8. $\int x^5 \cdot \sqrt{1-2x^6}dx$
9. $\int (7-2x) \cdot \sin(6x+1)dx$	10. $\int x^3 \cdot \ln 8x dx$
II.	
1. $\int_1^5 (x^2 - 4x)dx$	2. $\int_0^1 e^{x^2} \cdot x dx$

Вариант 28

I.	
1. $\int (3x^4 + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{4\sqrt{x}})dx$	2. $\int (4\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5x^5} + 1)dx$
3. $\int \sin(2x+5)dx$	4. $\int \sqrt{3x-2}dx$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-6x)}$	6. $\int x^5 \cdot \sqrt{1-x^6}dx$
7. $\int \cos(\ln x) \cdot \frac{dx}{x}$	8. $\int \frac{\cos x}{(5-\sin x)^5}dx$
9. $\int (4-5x) \cdot \cos(2x+1)dx$	10. $\int (3-5x) \cdot e^{7x}dx$
II.	
1. $\int_2^3 (x^4 - 2)dx$	2. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ

ПРИМЕР 1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$a)\ \int (\ln x)^8 \frac{dx}{x};\quad b)\ \int e^{2x^3+3} \cdot x^2 dx;$$

$$c)\ \int (2x+8) \cdot \cos 7x dx;\quad d)\ \int \operatorname{arctg} 3x dx.$$

Решение.

a) Применим подстановку $t = \ln x$ Тогда $dt = \frac{dx}{x}$ и

$$\int (\ln x)^8 \frac{dx}{x} = \int t^8 dt = \frac{1}{9}t^9 + C = \frac{1}{9}(\ln x)^9 + C = \frac{1}{9}\ln^9 x + C.$$

b) Применим подстановку $t = 2x^3 + 3$. Тогда

$$dt = 6x^2 dx;\quad \frac{1}{6}dt = x^2 dx,$$

откуда

$$\int e^{2x^3+3} x^2 dx = \int e^t \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6}e^t + C = \frac{1}{6}e^{2x^3+3} + C.$$

c) Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Положим $u = 2x + 8;\quad dv = \cos 7x dx$. Тогда

$$du = d(2x+8) = (2x+8)' dx = 2dx;$$

$$\int \cos 7x dx = \left| \begin{matrix} 7x = t \\ 7dx = dt \\ dx = \frac{1}{7}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{7}\int \cos t dt = \frac{1}{7}\sin t + C_1 = \frac{1}{7}\sin 7x + C_1 \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{7}\sin 7x.$$

Таким образом,

$$\int (2x+8)\cos 7x dx = \frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x - \frac{2}{7}\int \sin 7x dx =$$

$$= \frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x + \frac{2}{49}\cos 7x + C.$$

d) Здесь тоже воспользуемся формулой интегрирования по частям.

Положим $u = \operatorname{arctg} 3x,\quad dv = dx$.

Тогда $du = \dfrac{3}{1+9x^2}dx,\quad v = x$.

Отсюда

$$\int \operatorname{arctg} 3x dx = x \operatorname{arctg} 3x - 3\int \frac{xdx}{1+9x^2}.$$

Применяя в последнем интеграле подстановку $t = 1 + 9x^2$, получаем $dt = 18xdx$, следовательно,

$$3\int \frac{xdx}{1+9x^2} = \frac{3}{18}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{18}\ln|t| + C = \frac{3}{18}\ln(1+9x^2) + C.$$

Теперь окончательно имеем

$$\int \operatorname{arctg} 3x dx = x \operatorname{arctg} 3x - \frac{3}{18}\ln(1+9x^2) + C.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить определенные интегралы:

$$a)\ \int_1^3 (x^2 - 2x + 5)dx; \quad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - tgx)^2}{\cos^2 x}dx.$$

Решение.

$$a)\ \int_1^3 (x^2-2x+5)dx=$$

$$=(\frac{1}{3}x^3-x^2+5x)\Big|_1^3=(\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2+5\cdot 3)-(\frac{1}{3}\cdot 1^3-1^2+5\cdot 1)=10\frac{2}{3}.$$

b) Делаем замену $1-\operatorname{tg} x=t$. Тогда, во-первых, при изменении старой переменной интегрирования от Хниз=0 до $x_{\text{âåðõ}}=\frac{\pi}{4}$ новая переменная интегрирования в соответствии с заменой будет меняться от $t_{\text{í èç}}=1-\operatorname{tg}0=1$ до $t_{\text{âåðõ}}=1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=0$. Во-вторых, $dt=-\frac{dx}{\cos^2 x}$, то есть

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\operatorname{tg} x)^2}{\cos^2 x}dx=-\int_1^0 t^2dt=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}.$$

с осью Ox, решив уравнение $-6x+14=0$. Получаем $x=\frac{7}{3}$.

Таким образом, тело ограничено при $0\le x\le 1$ поверхностью, образованной вращением параболы $y=8x^2$ вокруг оси Ox, а при $1\le x\le\frac{7}{3}$ – вращением прямой $y=-6x+14$.

Искомый объем находим по формуле

$$V_{Ox}=\pi\int_a^b y^2dx.$$

В нашем случае имеем

$$V=\pi\int_0^1(8x^2)^2\cdot dx+\pi\int_1^{\frac{7}{3}}(-6x+14)^2\cdot dx.$$

Первый интеграл вычисляется просто:

$$64\pi\int_0^1 x^4\cdot dx = =64\pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = =\frac{64}{5}\pi .$$

Для вычисления второго интеграла используем подстановку $t=-6x+14$. Тогда $dt=-6\cdot dx$, $dx=-\frac{1}{6}dt$. При этом из условия $x\in[1;\ \frac{7}{3}]$ следует, что t меняется от 8 до 0 и

$$\pi\int_1^{\frac{7}{3}}(-6x+14)^2\cdot dx = \pi\int_8^0 t^2\left(-\frac{1}{6}\right)dt = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_8^0 = \frac{256}{9}\pi .$$

ТЕМА 3. Дифференциальные уравнения

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 4

ЗАДАЧА 5.1. Для дифференциальных уравнений без начальных условий найти их общие решения. При наличии начальных условий найти соответствующие этим условиям частные решения.

Вариант 1

1. $xy'-2y-1=y^2$	2. $x^2dy+(y^2+2)dx=0$
3. $xy'-y=x^3;\ y(1)=0$	4. $xy'-y=x^2\sin 2x;\ y(\pi/2)=1$

Вариант 2

1. $xyy'=1-x^2$	2. $y(e^x+1)dy-e^xdx=0$
3. $xy'-y=-2x\ln x;$ $y(1)=1$	4. $y'+\frac{y}{\cos^2 x}=(2+x^2)e^{-tgx};$ $y(0)=1$

Вариант 3

1. $\sqrt{y^2+1}\ dx=xydy$	2. $(e^x+2)y'=ye^x$
3. $x^3y'+3x^2y=2;\ y(1)=2$	4. $y'+3x^2y=x^3e^{-x^3};\ y(0)=1$

Вариант 4

1. $xydx+(x+1)dy=0$	2. $y'=e^{2x-3y}$

3. $y' + y = (x+1)e^{-x}$; $y(0) = 1$	4. $xy' - y = x^2 \cos 3x$; $y(\pi/2) = 1$

Вариант 5

1. $2x^2 yy' + y^2 = 2$	2. $xydy = (3x^2 + 2\sqrt{x} - 1)dx$
3. $xy' + y = x + 1$; $y(1) = 2$	4. $y' \sin^2 x + y = 4x^3 e^{ctgx} \sin^2 x$; $y(\pi/2) = 0$

Вариант 6

1. $y' = (y^2 + 1)tgx$	2. $\cos^2 2xdy - \sqrt{2 + y^2}dx = 0$
3. $y' - y\cos x = \cos x$; $y(0) = 1$	4. $(1 + x^2)y' + y = (1 + x)e^{-arctgx}$; $y(0) = 1$

Вариант 7

1. $x(1 + y^2)dx + y\sqrt{2 - x^2}dy = 0$	2. $y^2\sqrt{2 + x^2}y' = y^3 + 2$
3. $xy' - y = -x\ln x$; $y(1) = 2$	4. $y' + ytgx = \cos^{-1} x$; $y(0) = 0$

Вариант 8

1. $xydx + (1 + y^2)\sqrt{2 + x^2}dy = 0$	2. $y' \cos 3x - y^2 \sin 3x = 0$
3. $xy' - 4y = -4x^5$; $y(1) = 2$	4. $y' \cos x + y \sin x = 1$; $y(0) = 1$

Вариант 9

1. $xy' - y^2 = 1$	2. $(e^x - 1)dy + e^x\sqrt{3 - y^2}dx = 0$
3. $xy' + 3y = 2x^3$; $y(1) = 3$	4. $y' - y\sin x = e^{-\cos x} \sin 2x$; $y(0) = 1$

Вариант 10

1. $y' \cos x - (y + 2)\sin x = 0$	2. $x^2 \ln ydy + (1 + x)ydx = 0$
3. $xy' + y = x(1 + x^3)$; $y(1) = 1$	4. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$; $y(0) = 2$

Вариант 11

1. $y' - (y^2 + 3)ctgx = 0$	2. $(y^2 + 2)\sqrt{x}dy - ydx = 0$
3. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}$; $y(0) = 2$	4. $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1 + x^2}$; $y(0) = 2$

Вариант 12

1. $y'\cos^2 x - y\ln y = 0$	2. $y' = 2^{3x+5y}$
3. $xy' - y = 2x^3;\ y(1) = 1$	4. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2;$ $y(0) = 1$

Вариант 13

1. $y'\cos^2 3x = 2 - y^2$	2. $(e^{2x}+1)dy + ye^{2x}dx = 0$
3. $xy' + 2x^2 y = e^{-x^2};\ y(1) = 1$	4. $xy' - 3y = x^4;\ y(1) = 1$

Вариант 14

1. $xyy' = (1-x^2)(1+y^2)$	2. $y(2+x)dy - (2-y^2)dx = 0$
3. $y' - yctgx = \dfrac{1}{\sin x};\ y(\pi/2) = 1$	4. $xy' + 2y = \dfrac{1}{x};\ y(1) = 1$

Вариант 15

1. $x^2dy + (y^2+2)dx = 0$	2. $y'\ln y - y(2x-1) = 0$
3. $xy' - y = x^2\sin 2x;\ y(\pi/2) = 1$	4. $y'\cos x - 2y\sin x = 2;\ y(0) = 1$

Вариант 16

1. $y(e^x+1)dy - e^x dx = 0$	2. $y^2dy + x^4\sqrt{y^3+1}\cdot dx = 0$
3. $y' + \dfrac{y}{\cos^2 x} = e^{-tgx}(2-x^2);$ $y(0) = 1$	4. $y' - 4xy = x;\ y(1) = 2$

Вариант 17

1. $(e^x+2)y' = ye^x$	2. $xy' - 2y - 1 = y^2$
3. $y' + 3x^2y = x^3e^{-x^3};\ y(0) = 1$	4. $xy' - y = x^3;\ y(1) = 0$

Вариант 18

1. $xyy' = 1 - x^2$	2. $y'\cos^2 3x = 2 - y^2$
3. $xy' - y = -2x\ln x;\ y(1) = 1$	4. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2;$ $y(0) = 1$

Вариант 19

1. $\sqrt{y^2+1}\ dx = xydy$	2. $y'\cos^2 x - y\ln y = 0$
3. $x^3y' + 3x^2y = 2;\ y(1) = 2$	4. $xy' - y = 2x^3;\ y(1) = 1$

Вариант 20

1. $xydx + (x+1)dy = 0$	2. $y' - (y^2+3)ctgx = 0$
3. $y' + y = (x+1)e^{-x};\ y(0) = 1$	4. $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x;$ $y(0) = 1$

Вариант 21

1. $2x^2yy' + y^2 = 2$	2. $y'\cos x - (y+2)\sin x = 0$
3. $xy' + y = (x+1);\ y(1) = 2$	4. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2};\ y(0) = 2$

Вариант 22

1. $y' = (y^2+1)tgx$	2. $xy' - y^2 = 1$
3. $y' - y\cos x = \cos x;\ y(0) = 1$	4. $xy' + 3y = 2x^3;\ y(1) = 3$

Вариант 23

1. $x(1+y^2)dx + y\sqrt{2-x^2}dy = 0$	2. $y'\cos 3x - y^2\sin 3x = 0.$
3. $xy' - y = -x\ln x;\ y(1) = 2$	4. $xy' - 4y = -4x^4;\ y(1) = 2$

Вариант 24

1. $x(1+y^2)dy - y\ln 2xdx = 0$	2. $(e^x+2)y' = ye^x$
3. $y'\cos x - 2y\sin x = 2;\ y(0) = 2$	4. $y' + 3x^2y = x^3e^{-x^3};\ y(0) = 1$

Вариант 25

1. $\cos^2 2xdy - \sqrt{2-y^2}dx = 0$	2. $y'\sin^2 x - y\ln y = 0$
3. $(1+x^2)y' + y = (1+x)e^{-arctgx};$ $y(0) = 1$	4. $xy' - y = 2x^3;\ y(1) = 1$

Вариант 26

1. $xydy = (3x^2 + 2\sqrt{x} - 1)dx$	2. $y'\cos x - (y+2)\sin x = 0$
3. $y'\sin^2 x + y = 4x^3e^{ctgx}\sin^2 x;$ $y(\pi/2) = 0$	4. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2};\ y(0) = 2$

Вариант 27

1. $y' = e^{2x-3y}$	2. $x(1+y^2)dx + y\sqrt{2-x^2}dy = 0$
3. $xy' - y = x^2 \cos 3x;\ y(\pi/2) = 1$	4. $xy' - y = -x \ln x;\ y(1) = 2$

Вариант 28

1. $x^2 dy + (y^2+3)dx = 0$	2. $y(e^x+5)dy - e^x dx = 0$
3. $xy' - y = x^2 \sin 2x;\ y(\pi/2) = 1$	4. $y' + \dfrac{y}{\cos^2 x} = (2+x^2)e^{-tgx};$ $y(0) = 1$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ

ПРИМЕР 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' \cdot \ln y \cdot \cos^2 3x = y$.

Решение. Данное дифференциальное уравнение относится к типу с разделяющимися переменными. С учетом того, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, запишем его в виде $\dfrac{dy}{dx} \cdot \ln y \cdot \cos^2 3x = y$.

Разделяем переменные: $\dfrac{\ln y dy}{y} = \dfrac{dx}{\cos^2 3x}$.

Интегрируем обе части равенства и получаем общее решение уравнения: $\displaystyle\int \frac{\ln y \cdot dy}{y} = \int \frac{dx}{\cos^2 3x} + C.$

Остается вычислить интегралы:

$$\int \frac{\ln y \cdot dy}{y} = \left| \begin{array}{l} \ln y = t \\ dt = \dfrac{dy}{y} \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C_1 = \frac{1}{2}\ln^2 y + C_1;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \left| \begin{array}{l} 3x = t \\ 3dx = dt \\ dx = \dfrac{1}{3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\operatorname{tg} t + C_2 = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C_2.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\frac{1}{2}\ln^2 y = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C$$

ПРИМЕР 2. Найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее заданному начальному условию (решить задачу Коши):

$$xy' - y = -2\ln x, \quad y(1) = 0,2.$$

Решение. Данное уравнение является линейным. Разделим обе его части на x, а искомую функцию $y(x)$ представим в виде произведения двух других: $y = u(x)\cdot v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и исходное уравнение примет вид

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = \frac{-2\ln x}{x} \quad \text{или}$$

$$\left(u' - \frac{u}{x}\right)v + uv' = \frac{-2\ln x}{x}. \qquad (**)$$

Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы полученная при группировке скобка в (**) обратилась в нуль:

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0, \;\Rightarrow\; \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}, \;\Rightarrow\; \ln u = \ln x, \;\Rightarrow\; u = x$$

(здесь выбрано частное решение с $C = 0$ и без знаков модулей).

Подставим $u(x)$ в (**). Тогда имеем

$$x\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{-2\ln x}{x}, \;\Rightarrow\; dv = \frac{-2\ln x}{x^2}\cdot dx.$$

В качестве функции $v(x)$ возьмем общее решение этого дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными: $v = 2\int\frac{-1}{x^2}\cdot\ln x\cdot dx + C$.

Вычислим интеграл с помощью формулы интегрирования по частям:

$$2\int\frac{-1}{x^2}\cdot\ln x\cdot dx = \begin{vmatrix} \ln x = u, & du = \dfrac{dx}{x} \\ -\dfrac{dx}{x^2} = dv, & v = \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) + C.$$

Таким образом, $v = \frac{2}{x}(\ln x + 1) + C$, а общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = 2(\ln x + 1) + Cx.$$

Теперь для нахождения значения произвольной постоянной C воспользуемся начальным условием $y(1) = 0,2$. Тогда имеем

$$0,2=2(\ln 1 + 1)+C,$$

Откуда $0,2=2(0+1)+C$, $C=-1,8$.

Итак, искомое частное решение имеет вид

$$y = 2(1 - 0,9x + \ln x).$$

Тема 4. Классическое определение вероятности случайного события. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 4

ЗАДАЧА 4.1. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на верхних гранях будет:

Вариант	Сумма очков на верхних гранях	Вариант	Сумма очков на верхних гранях
1	меньше пяти	15	меньше девяти
2	кратна пяти	16	нечетная
3	больше пяти	17	четная
4	не меньше семи	18	меньше десяти
5	кратна шести	19	не меньше десяти
6	меньше шести	20	кратна четырем
7	не больше семи	21	больше десяти
8	не меньше шести	22	меньше одиннадцати
9	кратна двум	23	не больше пяти
10	не больше шести	24	не больше десяти
11	не меньше восьми	25	больше одиннадцати
12	не меньше девяти	26	не меньше трех
13	кратна трем	27	кратна четырем
14	не больше восьми	28	не больше четырех

ЗАДАЧА 4.2. На складе имеется k инженерных и l бухгалтерских микрокалькуляторов в одинаковых упаковках. Случай-

ным образом берут i упаковок. Найти вероятность того, что в них окажется j инженерных микрокалькуляторов.

Замечание. Задачу решить, используя классическое определение вероятности и элементы комбинаторики.

Вариант	k	l	i	J	**Вариант**	k	l	i	j
1	5	6	5	3	15	5	6	5	4
2	6	5	4	2	16	7	4	5	3
3	6	5	5	3	17	5	7	4	3
4	7	4	4	2	18	6	5	5	2
5	4	5	4	2	19	5	7	5	4
6	8	6	5	3	20	6	7	5	3
7	6	7	4	4	21	6	8	5	4
8	4	7	4	2	22	6	5	5	4
9	5	6	5	3	23	8	6	5	3
10	7	4	4	2	24	6	7	4	3
11	8	6	4	3	25	5	7	4	2
12	6	5	4	3	26	6	7	6	3
13	4	6	4	3	27	5	7	5	3
14	8	6	5	2	28	6	8	5	3

ЗАДАЧА 4.3. Устройство состоит из трех независимых элементов, безотказно работающих в течение некоторого фиксированного промежутка времени с вероятностями p_1, p_2, p_3 соответственно. Найти вероятность того, что за указанное время выйдет из строя:

а) только один элемент;

б) два элемента;

в) хотя бы один элемент.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0,95	0,97	0,84	0,93	0,92	0,98	0,87	0,86	0,90	0,88
p_2	0,91	0,95	0,90	0,91	0,88	0,89	0,91	0,96	0,85	0,92
p_3	0,86	0,91	0,92	0,85	0,91	0,96	0,97	0,89	0,93	0,96

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_1	0,92	0,87	0,94	0,91	0,93	0,96	0,89	0,90	0,92	0,86
p_2	0,95	0,96	0,91	0,88	0,89	0,85	0,92	0,94	0,86	0,91
p_3	0,88	0,94	0,98	0,95	0,96	0,92	0,95	0,85	0,91	0,95

Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28
p_1	0,91	0,87	0,86	0,87	0,95	0,92	0,87	0,89
p_2	0,88	0,90	0,91	0,92	0,87	0,84	0,93	0,98
p_3	0,96	0,92	0,94	0,95	0,93	0,94	0,95	0,91

ЗАДАЧА 4.4. В урне k шаров, из которых l шаров красные, а остальные синие. Случайным образом отобраны два шара. Найти вероятность того, что не более одного из них окажутся синими.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
l	44	36	28	37	42	54	61	35	48	72

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k	85	85	85	85	85	85	85	85	85	85
l	41	55	61	67	23	34	45	37	48	51

Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28
k	78	78	78	78	78	78	78	78
l	28	34	36	42	45	48	51	57

ЗАДАЧА 4.5. Дана вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится: а) ровно k раз; б) менее k раз; в) не менее k раз.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,2	0,3	0,2	0,4	0,3	0,3	0,2	0,9	0,8	0,7
n	5	4	5	5	5	4	4	5	4	5
k	3	2	2	2	3	3	2	2	3	2

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p	0,9	0,4	0,4	0,6	0,6	0,3	0,7	0,4	0,8	0,6
n	4	4	5	5	4	6	5	4	5	5
k	2	2	3	2	3	2	3	2	2	3

Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28
p	0,7	0,3	0,1	0,1	0,1	0,3	0,9	0,2
n	4	6	5	6	6	4	5	5
k	2	3	2	3	2	3	3	2

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ

ПРИМЕР 1. Одновременно подброшены две игральные кости. В результате на их верхних гранях выпала некоторая сумма очков. Требуется перечислить все возможные элементарные исходы этого опыта и найти вероятность того, что выпавшая сумма очков окажется кратной пяти.

Решение.

1. Всех возможных элементарных исходов в рассматриваемом опыте 36. Представим их следующей таблицей:

$$
\begin{array}{cccccc}
1;1 & 1;2 & 1;3 & \underline{1;4} & 1;5 & 1;6 \\
2;1 & 2;2 & \underline{2;3} & 2;4 & 2;5 & 2;6 \\
3;1 & \underline{3;2} & 3;3 & 3;4 & 3;5 & 3;6 \\
\underline{4;1} & 4;2 & 4;3 & 4;4 & 4;5 & \underline{4;6} \\
5;1 & 5;2 & 5;3 & 5;4 & \underline{5;5} & 5;6 \\
6;1 & 6;2 & 6;3 & \underline{6;4} & 6;5 & 6;6
\end{array}
$$

2. Обозначим событие, вероятность которого по условию задачи предлагается найти, через A. Благоприятствующие этому событию исходы опыта подчеркнуты в приведенной таблице. Их число – 7. Согласно классическому определению вероятности события для нахождения искомой вероятности мы должны разделить это число на общее число элементарных исходов опыта, т.е. на 36:

$$P(A) = \frac{7}{36}.$$

ПРИМЕР 2. На складе имеется 6 инженерных и 5 бухгалтерских микрокалькуляторов в одинаковых упаковках. Случайным образом берут 4 упаковки. Найти вероятность того, что в них окажется 2 инженерных микрокалькулятора;

Решение.

Элементарными исходами рассматриваемого опыта будут, очевидно, всевозможные сочетания из 11 элементов (микрокалькуляторов) по 4. Их число равно

$$n = C_{11}^{4} = \frac{11!}{4!\cdot(11-4)!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 330.$$

Пусть A = {в упаковках окажется 2 инженерных микрокалькулятора}. Значит, в отобранных четырех упаковках 2 инженерных и 2 бухгалтерских микрокалькулятора. Отсюда находим число m благоприятствующих событию $\grave{A}$ исходов опыта и с помощью классического определения вероятности получаем:

$$m = C_{6}^{2}\cdot C_{5}^{2} = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 150, \Rightarrow\ P(A) = \frac{m}{n} = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}.$$

ПРИМЕР 3. Три стрелка производят по одному выстрелу в цель независимо друг от друга. Вероятности попадания в цель для каждого из них равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности следующих событий:

В цель попадет только один стрелок.

В цель попадут два стрелка.

В цель попадет хотя бы один стрелок.

Решение. Рассмотрим следующие события:

$A_1 =$ {первый стрелок попал в цель};

$A_2 =$ {второй стрелок попал в цель};

$A_3 =$ {третий стрелок попал в цель};

$\overline{A}_1 =$ {первый стрелок не попал в цель};

$\overline{A}_2 =$ {второй стрелок не попал в цель};

$\overline{A}_3 =$ {третий стрелок не попал в цель}.

По условию

$$P(A_1) = 0{,}7;\ P(A_2) = 0{,}8;\ P(A_3) = 0{,}9;\ P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$

$$P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;\ P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

1. Пусть событие $B =$ {попал только один стрелок}. Тогда

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3.$$

Отсюда, в силу несовместности событий-слагаемых и независимости событий-сомножителей, имеем

$$P(B) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}092.$$

2. Пусть событие $C =$ {попадут только два стрелка}. Тогда

$$C = A_1 A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3,$$

откуда

$$P(C) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}398.$$

3. Пусть событие $D =$ {попал хотя бы один стрелок}. Тогда противоположное событие $\overline{D} =$ {не попал ни один из них}, т. е. $\overline{D} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Поэтому $P(\overline{D}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}006.$

Отсюда

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

ПРИМЕР 4. Среди 90 микрокалькуляторов, имеющихся в вычислительной лаборатории, 46 новые, а остальные – бывшие в употреблении. Наугад взято два микрокалькулятора. Найти вероятность того, что не более одного из них окажутся бывшими в употреблении.

Решение.

А = {из выбранных микрокалькуляторов не более одного окажутся бывшими в употреблении}.

Вместе с событием А вводим дополнительно события:

$A_1 =$ {первый микрокалькулятор новый};

$A_2 =$ {второй микрокалькулятор новый}.

Тогда

$\overline{A}_1 =$ {первый микрокалькулятор не новый};

$\overline{A}_2 =$ {второй микрокалькулятор не новый}.

Используя действия над событиями, имеем

$$A = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2.$$

Здесь события-слагаемые являются несовместными, а события-сомножители – зависимыми, поэтому

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2/A_1)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2/\overline{A}_1)+P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)=$$

$$=\frac{46}{90}\cdot\frac{44}{89}+\frac{44}{90}\cdot\frac{45}{89}+\frac{46}{90}\cdot\frac{45}{90}=\frac{6074}{8010}\approx 0,76.$$

ПРИМЕР 5. Дана вероятность $p=0,75$ появления события A в каждом из 6 независимых испытаний. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится: а) ровно 4 раза; б) менее 4 раз; в) не менее 4 раз.

Решение. При ответе на поставленные вопросы используем формулу Бернулли: вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \text{или}$$

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k},$$

где $q=1-p$, а $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n.$

В нашем примере имеем:

а) $P_6(4)=\dfrac{6!}{4!\cdot(6-4)!}\cdot(0,75)^4\cdot(1-0,75)^{6-4}\approx 0,297.$

б) $P_6(k<4)=P_6(3)+P_6(2)+P_6(1)+P_6(0)=$

$$=\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}\cdot(0,75)^3\cdot(0,25)^3+\frac{6!}{2!\cdot(6-2)!}\cdot(0,75)^2\cdot(0,25)^4+$$

$$+\frac{6!}{1!\cdot(6-1)!}\cdot(0,75)^1\cdot(0,25)^5+\frac{6!}{0!\cdot(6-0)!}\cdot(0,75)^0\cdot(0,25)^6\approx 0,169.$$

в) $P_6(k\ge 4)=P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)=$

$$=\frac{6!}{4!\cdot(6-4)!}\cdot(0,75)^4\cdot(0,25)^2+\frac{6!}{5!\cdot(6-5)!}\cdot(0,75)^5\cdot(0,25)^1+$$

$$+\frac{6!}{6!\cdot(6-6)!}\cdot(0,75)^6\cdot(0,25)^0\approx 0,831.$$

Тема 5. Закон распределения и числовые характеристики случайных величин

ЗАДАЧА 4.6.

Составить закон распределения дискретной случайной величины X с шестью различными значениями. Вычислить ее математическое ожидание, дисперсию (двумя способами) и среднее квадратичное отклонение.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ

ПРИМЕР. Составить закон распределения дискретной случайной величины X с шестью различными значениями. Вычислить ее математическое ожидание, дисперсию (двумя способами) и среднее квадратичное отклонение. Представить это распределение геометрически.

Решение. Закон распределения дискретной случайной величины (ряд распределения) представляет собой таблицу, в первой строке которой находятся все возможные значения случайной величины, а во второй – вероятности этих значений, причем сумма всех вероятностей должна равняться 1.

Одним из возможных вариантов требуемого в условии задачи закона распределения может служить следующая таблица:

X	1	3	4	6	9	10
p	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

Вычисляем математическое ожидание случайной величины.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 1\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}1+9\cdot 0{,}3+10\cdot 0{,}1=5{,}8.$$

Вычисляем дисперсию случайной величины.

1) Ищем дисперсию по формуле $D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2\cdot p_i$.

В нашем случае

$$D(X)=(1-5{,}8)^2\cdot 0{,}1+(3-5{,}8)^2\cdot 0{,}2+(4-5{,}8)^2\cdot 0{,}2+$$
$$+(6-5{,}8)^2\cdot 0{,}1+(9-5{,}8)^2\cdot 0{,}3+(10-5{,}8)^2\cdot 0{,}1=9{,}36.$$

2) Ищем дисперсию с помощью универсальной формулы:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

В нашем примере

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i = 1^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}2 + 6^2 \cdot 0{,}1 +$$

$$+9^2 \cdot 0{,}3 + 10^2 \cdot 0{,}1 = 43.$$

$$D(X) = 43 - (5{,}8)^2 = 9{,}36.$$

Вычисляем с.к.о.: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{9{,}36}\approx 3{,}06$.

Тема 6. Нормальное распределение

Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

ЗАДАЧА 4.7.

Варианты 1-10. Предполагается, что вес отдельного хлебобулочного изделия (г) в данной партии, выпускаемой хлебозаводом, есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратичным отклонением σ. Требуется определить: 1) процент изделий в данной партии, вес которых заключен в интервале (α, β); 2) диапазон изменения веса.

Вариант	Изделие	a	σ	(α, β)
1	Хлеб «Дарницкий»	680	4	(670; 700)
2	Хлеб «Венский»	600	8	(594; 605)
3	Батон «Горчичный»	450	6	(445; 458)
4	Батон «Подмосковный»	400	6	(392; 405)
5	Батон «Французский»	300	5	(294; 302)
6	Булка «Ярославская»	200	3	(192; 205)
7	Плюшка	150	2	(147; 154)
8	Сдоба «Воронежская»	120	2	(114; 123)
9	Рожок	100	2	(99; 104)
10	Батон «Кольцовский»	500	7	(498; 505)

Варианты 11-20. Предполагается, что вес плитки шоколада X (г) в данной партии, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием a и

средним квадратичным отклонением σ. Требуется определить: 1) процент плиток в данной партии, вес которых заключен в интервале (α, β); 2) диапазон изменения веса плитки шоколада.

Вариант	**Изделие (шоколад)**	***a***	σ	(α, β)
11	Аленка	100	3	(96,104)
12	Сливочный	75	3	(71,77)
13	Сказочный мир	25	2	(22,26)
14	Золотой фонд	185	5	(178,190)
15	Финт	30	2	(29,33)
16	Picnik	45	4	(42,48)
17	Snikers	50	4	(44,56)
18	Wispa	40	3,5	(36,44)
19	Twix	60	4,5	(45,62)
20	Bounty	57	5	(54,60)

Варианты 21-28. Предполагается, что случайная величина X – срок эксплуатации бытовых электроламп в данной партии (суток) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием а и средним квадратичным отклонением σ. Требуется определить: 1) процент электроламп в данной партии, срок эксплуатации которых будет не менее α и не более β суток; 2) гарантированный минимум и возможный максимум времени горения электролампы.

Вариант	**А**	σ	(α, β)
21	31	4	(32,35)
22	32	6	(29,38)
23	33	7	(28,35)
24	34	5	(31,37)
25	35	3	(33,41)
26	36	2	(28,42)
27	37	4	(39,45)
28	38	8	(34,41)

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ

ПРИМЕР. Для коров некоторой породы удой за лактацию является случайной величиной X, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 3200 кг и средним квадратичным отклонением 300 кг. Каков процент животных, удои которых за лактацию заключены в пределах от 3000 кг до 3500 кг? Каков диапазон изменения удоев?

Решение.

Воспользуемся формулой:

если $X \sim N(a;\ \sigma), \Rightarrow P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$

В нашем случае $\alpha = 3000, \beta = 3500, a = 3200, \sigma = 300$, поэтому

$$P(3000 < X < 3500) = \Phi\left(\frac{3500 - 3200}{300}\right) - \Phi\left(\frac{3000 - 3200}{300}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-0{,}66) = \Phi(1) + \Phi(0{,}66) = 0{,}3413 + 0{,}2454 \approx 0{,}59.$$

Замечание. Для нахождения значений функции Лапласа $\Phi(x)$ использовали таблицы приложения 3.

Полученный выше результат означает, что примерно 59% коров будут иметь за период лактации удои в пределах от 3000 кг до 3500 кг.

2. Чтобы определить диапазон значений случайной величины X, воспользуемся правилом «трех сигм» и вычислим

$a - 3\sigma = 3200 - 900 = 2300,\ a + 3\sigma = 3200 + 900 = 4100.$

Таким образом, $2300 < X < 4100$. Иначе говоря, практически достоверно, что для коров данной породы удои за лактацию колеблются в пределах от 2300 кг до 4100 кг.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица производных основных элементарных функций
и правил дифференцирования

1.	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n;$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$
2.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a;$	$(e^x)' = e^x.$
3.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a};$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$
4.	$(\sin x)' = \cos x;$ $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$	$(\cos x)' = -\sin x;$ $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
5.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$ $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$
6.	*а*) $c' = 0 \quad (c = const);$ *б*) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x);$ *в*) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$ *г*) $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x);$ *д*) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2};$ *е)* если задана сложная функция $y = f(u)$, где $u = g(x)$, т.е. $y = f\left(g\left(x\right)\right)$, и каждая из функций $y = f(u)$, $u = g(x)$ дифференцируема по своему аргументу, то $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} \quad ([f(g(x))]' = f'[(g(x)] \cdot g'(x)).$	

Приложение 2

Таблица неопределенных интегралов

1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \forall n \neq -1;$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$
2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C.$	
3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	$\int e^x dx = e^x + C.$
4.	$\int \sin x dx = -\cos x + C.$	
5.	$\int \cos x dx = \sin x + C.$	
6.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	
7.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$	
8.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C.$	
9.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C.$	
10.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$
11.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
12.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert\frac{a + x}{a - x}\right\rvert + C.$	
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C.$	

Приложение 3

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.35	0.1368	0.70	0.2580	1.05	0.3531
0.01	0.0040	0.36	0.1406	0.71	0.2611	1.06	0.3554
0.02	0.0080	0.37	0.1443	0.72	0.2642	1.07	0.3577
0.03	0.0120	0.38	0.1480	0.73	0.2673	1.08	0.3599
0.04	0.0160	0.39	0.1517	0.74	0.2703	1.09	0.3621
0.05	0.0199	0.40	0.1554	0.75	0.2734	1.10	0.3643
0.06	0.0239	0.41	0.1591	0.76	0.2764	1.11	0.3665
0.07	0.0279	0.42	0.1628	0.77	0.2794	1.12	0.3686
0.08	0.0319	0.43	0.1664	0.78	0.2823	1.13	0.3708
0.09	0.0359	0.44	0.1700	0.79	0.2852	1.14	0.3729
0.10	0.0398	0.45	0.1736	0.80	0.2881	1.15	0.3749
0.11	0.0438	0.46	0.1772	0.81	0.2910	1.16	0.3770
0.12	0.0478	0.47	0.1808	0.82	0.2939	1.17	0.3790
0.13	0.0517	0.48	0.1844	0.83	0.2967	1.18	0.3810
0.14	0.0557	0.49	0.1879	0.84	0.2995	1.19	0.3830
0.15	0.0596	0.50	0.1915	0.85	0.3023	1.20	0.3849
0.16	0.0636	0.51	0.1950	0.86	0.3051	1.21	0.3869
0.17	0.0675	0.52	0.1985	0.87	0.3078	1.22	0.3883
0.18	0.0714	0.53	0.2019	0.88	0.3106	1.23	0.3907
0.19	0.0753	0.54	0.2054	0.89	0.3133	1.24	0.3925
0.20	0.0793	0.55	0.2088	0.90	0.3159	1.25	0.3944
0.21	0.0832	0.56	0.2123	0.91	0.3186	1.26	0.3962
0.22	0.0871	0.57	0.2157	0.92	0.3212	1.27	0.3980
0.23	0.0910	0.58	0.2190	0.93	0.3238	1.28	0.3997
0.24	0.0948	0.59	0.2224	0.94	0.3264	1.29	0.4015
0.25	0.0987	0.60	0.2257	0.95	0.3289	1.30	0.4032
0.26	0.1026	0.61	0.2291	0.96	0.3315	1.31	0.4049
0.27	0.1064	0.62	0.2324	0.97	0.3340	1.32	0.4066
0.28	0.1103	0.63	0.2357	0.98	0.3365	1.33	0.4082
0.29	0.1141	0.64	0.2389	0.99	0.3389	1.34	0.4099
0.30	0.1179	0.65	0.2422	1.00	0.3413	1.35	0.4115
0.31	0.1217	0.66	0.2454	1.01	0.3438	1.36	0.4131
0.32	0.1255	0.67	0.2486	1.02	0.3461	1.37	0.4147
0.33	0.1293	0.68	0.2517	1.03	0.3485	1.38	0.4162
0.34	0.1331	0.69	0.2549	1.04	0.3508	1.39	0.4177

Продолжение приложения 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.40	0.4192	1.79	0.4633	2.36	0.4909	5.00	0.5000
1.41	0.4207	1.80	0.4641	2.38	0.4913		
1.42	0.4222	1.81	0.4649	2.40	0.4918		
1.43	0.4236	1.82	0.4656	2.42	0.4922		
1.44	0.4251	1.83	0.4664	2.44	0.4927		
1.45	0.4265	1.84	0.4671	2.46	0.4931		
1.46	0.4279	1.85	0.4678	2.48	0.4934		
1.17	0.4292	1.86	0.4686	2.50	0.4938		
1.48	0.4306	1.87	0.4693	2.52	0.4941		
1.49	0.4319	1.88	0.4699	2.54	0.4945		
1.50	0.4332	1.89	0.4706	2.56	0.4948		
1.51	0.4345	1.90	0.4713	2.58	0.4951		
1.52	0.4357	1.91	0.4719	2.60	0.4953		
1.53	0.4370	1.92	0.4726	2.62	0.4956		
1.54	0.4382	1.93	0.4732	2.64	0.4959		
1.55	0.4394	1.94	0.4738	2.66	0.4961		
1.56	0.4406	1.95	0.4744	2.68	0.4963		
1.57	0.4418	1.96	0.4750	2.70	0.4965		
1.58	0.4429	1.97	0.4756	2.72	0.4967		
1.59	0.4441	1.98	0.4761	2.74	0.4969		
1.60	0.4452	1.99	0.4767	2.76	0.4971		
1.61	0.4463	2.00	0.4772	2.78	0.4973		
1.62	0.4474	2.02	0.4783	2.80	0.4974		
1.63	0.4484	2.04	0.4793	2.82	0.4976		
1.64	0.4495	2.06	0.4803	2.84	0.4977		
1.65	0.4505	2.08	0.4812	2.86	0.4979		
1.66	0.4515	2.10	0.4821	2.88	0.4980		
1.67	0.4525	2.12	0.4830	2.90	0.4981		
1.68	0.4535	2.14	0.4838	2.92	0.4982		
1.69	0.4545	2.16	0.4846	2.94	0.4984		
1.70	0.4554	2.18	0.4854	2.96	0.4985		
1.71	0.4564	2.20	0.4861	2.98	0.4986		
1.72	0.4573	2.22	0.4868	3.00	0.4986		
1.73	0.4582	2.24	0.4875	3.20	0.4993		
1.74	0.4591	2.26	0.4881	3.40	0.4997		
1.75	0.4599	2.28	0.4887	3.60	0.4998		
1.76	0.4608	2.30	0.4893	3.80	0.4999		
1.77	0.4616	2.32	0.4898	4.00	0.5000		
1.78	0.4625	2.34	0.4904	4.50	0.5000		