Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I"

Агроинженерный факультет

Кафедра математики и физики

МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания для самостоятельной работы
обучающихся по направлению подготовки: Ветеринарно-санитарная экспертиза
профиль подготовки: Ветеринарно-санитарная экспертиза

ВОРОНЕЖ – 2019

Составители:
профессор В.П. Шацкий, доцент А.Е. Попов, .ст. преподаватель Н.Г. Спирина, кафедра математики и физики ВГАУ

Рецензент:

Профессор, зав. кафедрой информационного обеспечения и моделирования агроэкономических систем ВГАУ, д.э.н. А.В. Улезько

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры математики и физики ВГАУ (протокол № 1 от 02.09.2019 г.).

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании методической комиссии факультета ветеринарной медицины и технологии животноводства ВГАУ (протокол № 5 от 02.12.2019 г.).

Настоящая методическая разработка предназначена для помощи обучающимся 1 курса при выполнении заданий по исследованию функций одной переменной с целью последующего построения их графиков и вычисления интегралов.

Под функцией $y = f(x)$ мы будем понимать закон, по которому каждому x из некоторого множества D ставится в соответствие единственный элемент y из множества E. Множество D называется областью определения, а множество E – множеством значений функции.

Исследование функций проводится по вполне определенной схеме, хотя в ряде ситуаций можно и изменять ее последовательность.

1. Первым пунктом в исследовании принято выяснить **область определения функции**. Следует различать **естественную** и **искусственную** области определения. Естественная область определения – это множество значений переменной, при которых функция имеет смысл. Наиболее часто встречаемые случаи приведены в таблице

Функция	Область определения
$y = \sqrt[2n]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
$y = \log_a f(x)$	$f(x) > 0$
$y = \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$	$f(x) \neq 0$

Искусственная область определения – это дополнительные ограничения, продиктованные физическим смыслом задачи. Например, требуется исследовать функцию $y = \sqrt{10 - x}$, где x – температура в °C. Естественная область определения этой функции: $x \leq 10$, но так как температура не может быть меньше –273 °C, то $x \geq -273$.

В связи с этим, под областью определения следует понимать пересечение естественной и искусственной областей определения. В предложенном выше примере область определения имеет вид: $-273 \leq x \leq 10$.

2. Вторым пунктом можно попытаться определить **множество значений функции**. Например, множеством значений функции $y = 5\sin 7x$ является отрезок [–5;5], так как $|\sin 7x| \leq 1$.

Этот пункт в большинстве случаев очень трудно реализовать, поэтому часто он является необязательным.

Иногда можно увидеть некоторые ограничения на множество значений функции. Например, у функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ числитель меньше знаменателя, поэтому значения функции всегда будут меньше 1.

3. **Четность и нечетность** функции. Это достаточно важный элемент алгоритма исследования функции потому, что этот шаг может значительно упростить построение ее графика.

Необходимым условием четности или нечетности является **симметричность ее области определения относительно начала координат**. В этом случае функция называется **четной**, если f(x) = f(–x), **нечетной**, если f(x) = –f(–x). Если эти соотношения не выполняются, то функция является функцией **общего вида**.

В случае четности график функции симметричен относительно оси ординат (см. рис. 1). В случае нечетности график функции симметричен относительно начала координат (см. рис. 2)

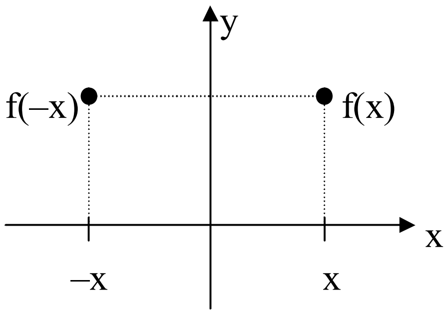


Рис. 1.

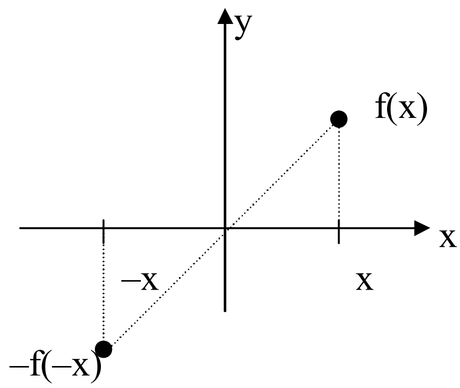


Рис.2.

Примеры. 1) Функция $y = \dfrac{x}{x-1}$ является функцией общего вида, так как ее область определения не является симметричной относительно начала координат (точка x= –1 входит в область определения, а x=1 – не входит).

2) Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$. Как видно, функции f(x) и f(–x) не совпадают. Но $-f(-x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$, поэтому данная функция является нечетной.

Достаточно удобно использовать аналогию арифметических действий с функциями действиями с числами (имеется в виду аналогия четной функции с числами со знаком «+», а нечетной функции – с числами со знаком «–» . Например, произведение четной и нечетной функций будет нечетной функцией, отношение двух нечетных – четной и т. д.

Сумма или разность четной и нечетной функций всегда является функцией общего вида. Простейшая четная функция – это y = b, простейшая нечетная : y = x, поэтому функции: y = x + 5, $y = x^3 + x^2$, $y = \dfrac{x+8}{x}$ – функции общего вида.

4. **Периодичность**. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует положительное число T такое, что для всех x выполняется равенство: $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее из чисел T называется периодом функции.

В большинстве случаев периодические функции – это тригонометрические функции, хотя могут быть и другие ситуации.

Найдем, например, период функции $y = \sin 3x$. По определению, для всех x $\sin 3x = \sin[3(x+T)]$, или $\sin 3x - \sin(3x+3T) = 0$. Используя формулу разности синусов, получаем $2\sin(1.5T)\cos(3x+1.5T) = 0$. Очевидно, что при всех x это равенство будет выполняться , когда $\sin(1.5T) = 0$. Таким образом, $1.5T = \pi n$, $T = \frac{2}{3}\pi n$. По определению, периодом функции является число $T = 2\pi/3$.

5. Непрерывность функции. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если предел этой функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

В этом случае справедливы равенства:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на интервале,** если она определена на этом интервале и непрерывна в каждой точке интервала. Геометрически непрерывность функции на интервале означает, что график этой функции на данном интервале есть сплошная линия.

Говорят, что точка x_0 есть **точка разрыва** для функции $y = f(x)$, если в ней не выполняется по крайней мере, одно из условий непрерывности. Существуют несколько ситуаций:

1. Односторонние пределы (левый и правый) существуют, конечны и равны между собой, а в самой точке x_0 функция не определена или же ее значение в точке x_0 не равно общему значению пределов (рис 3 – а,б); точка x_0 в этом случае называется **точкой устранимого разрыва;**

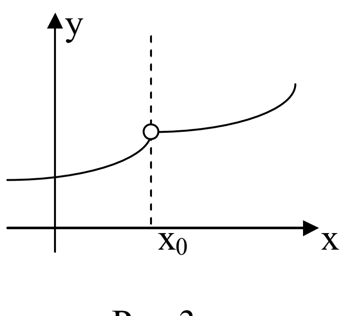


Рис 3 – а.

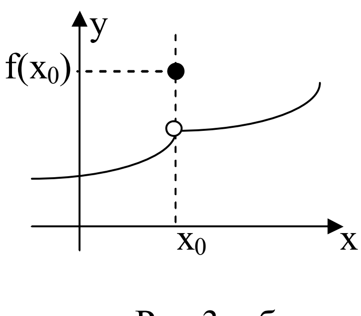


Рис 3 – б.

2. Оба предела существуют, конечны и не равны между собой. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_0 **разрыв первого рода**, точку x_0 при этом называют **точкой конечного скачка функции** (рис 3-в):

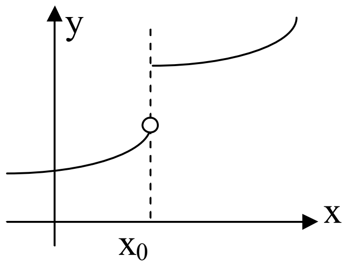


Рис. 3–в.

3. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ не существует или равен бесконечности, то говорят, что она имеет в точке x_0 **разрыв второго рода** (рис. 4 – а,б,в).

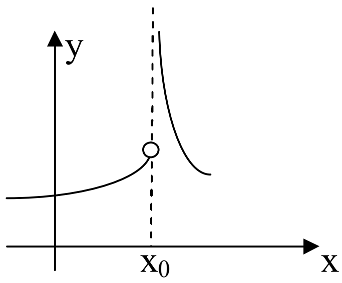


Рис 4-а.

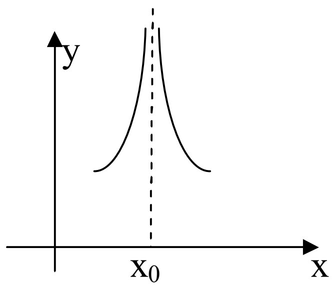


Рис 4-б.

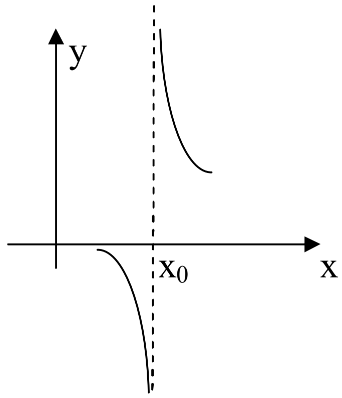


Рис 4-в.

Примеры точек разрыва.

1. Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$, в которой функция не определена. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, то $x = 0$ есть точка устранимого разрыва.

2. Функция $y = \dfrac{|x|}{x}$ имеет разрыв I-го рода в точке $x = 0$, так как в ней пределы функции слева и справа существуют, но не равны между собой: $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{|x|}{x} = -1,\ \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{|x|}{x} = 1$.

3. Точкой разрыва функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ является точка $x = 1$, поскольку в ней не выполняется условие непрерывности: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1} = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$. Поэтому, согласно определению $x = 1$ является точкой разрыва второго рода.

6. Вертикальные асимптоты. Напомним, что прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$**,** если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Отсюда вытекает одно важное обстоятельство: вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва второго рода функции или на концах ее области определения $(a; b)$, если a и b – конечные числа (например, ось ординат является вертикальной асимптотой для графика функции $y = \ln x$). Заметим, что для некоторых функций вертикальных асимптот может быть бесконечно много (например, $y = \operatorname{tg} x$)

Примеры вертикальных асимптот.

1**.** Пусть $y = 4 + \frac{1}{x}$**.** Так как в точке $x = 0$ функция y не является непрерывной, то вычислим $\lim\limits_{x \to 0-0} (4 + \frac{1}{x}) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} (4 + \frac{1}{x}) = +\infty$. Следовательно, $x = 0$ - вертикальная асимптота. Поведение графика функции вблизи найденной асимптоты изобразим схематично (рис. 5).

2. Пусть $y = 2^{1/x}$**.** Здесь $\lim\limits_{x \to 0-0} 2^{1/x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+0} 2^{1/x} = +\infty$. Отсюда заключаем, что прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой (рис. 6).

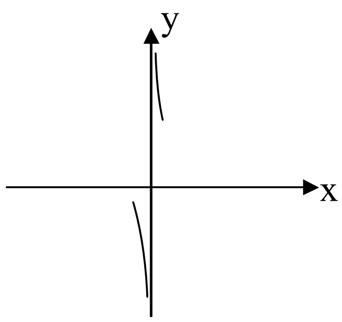


Рис 5.

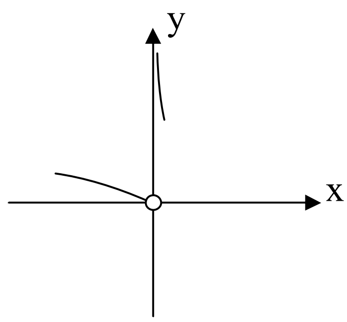


Рис 6.

7. **Исследование поведения функции в бесконечности, определение горизонтальных или наклонных асимптот.**

Как известно, асимптотой графика функции $y = f(x)$ является прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Нахождение горизонтальных или наклонных асимптот основано на следующих утверждениях.

Пусть функция y = f(x) определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$. Тогда прямая y =b есть горизонтальная асимптота графика функции y = f(x).

Пусть функция y = f(x) определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$. Тогда прямая y = kx+b является наклонной асимптотой графика функции y = f(x).

Пример 1. Функция $y = \frac{3x+1}{x-2}$ имеет горизонтальную асимптоту y=3, так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 3$.

Пример 2. Исследуем поведение в бесконечности функции $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.

Вычислим $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1} = -1$. В силу четности имеем также $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$, то есть прямая y= - 1 – горизонтальная асимптота.

Пример 3. Для функции $y = \frac{2-x}{x^2+5}$ горизонтальной асимптотой является ось абсцисс y = 0.

Действительно, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2-x}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x(\frac{2}{x}-1)}{x^2(1+\frac{5}{x^2})} = -\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Пример 4. График функции $y = \frac{2x^3-1}{x^2+1}$ не имеет горизонтальную асимптоту, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-1}{x^2+1} = \infty$.

Замечание. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, функция может иметь наклонную асимптоту.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что для дробно-рациональных функций горизонтальные асимптоты имеют место, если старшая степень числителя меньше или равна старшей степени знаменателя.

Замечание 2. В случае, когда старшие степени числителя и знаменателя дробно-рациональной функции равны, горизонтальную асимптоту можно получить выделением целой части функции и определить расположение графика функции относительно асимптоты. Вернемся к примеру 1; разделив числитель на знаменатель получим $y = 3 + \dfrac{7}{x-2}$. При достаточно больших x значение функции больше чем значение y = 3, следовательно, при $x \to \infty$ график функции будет расположен выше асимптоты. При $x \to -\infty$ значение функции меньше значения y = 3, следовательно, график функции ниже указанной асимптоты (рис. 7).

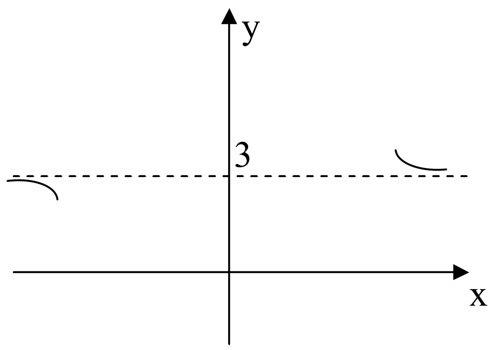


Рис. 7

Вернемся к примеру 4 и проверим, имеет ли указанная функция наклонную асимптоту. Определим конечные числа k и b, если таковые существуют:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{x(x^2+1)} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2-\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^2})} = 2\ ;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}(\frac{2x^3-1}{x^2+1}-2x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-1-2x^3-2x}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x(\frac{-1}{x}-2)}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = -2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Таким образом, согласно определению прямая y = 2x является наклонной асимптотой графика функции.

Пример 5. Проверить имеет ли наклонную асимптоту график функции $y = \dfrac{x^3}{x+4}$. Определим $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x+4)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2(1+\frac{4}{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$. Как видим, наклонная асимптота не существует.

Замечание 3. Из определения асимптоты следует, что наклонная асимптота может возникать лишь у функций, старшая степень числителя которых больше чем старшая степень знаменателя на единицу.

Замечание 4. Как и в случае с горизонтальными асимптотами, более простым способом определения наклонных асимптот является выделение целой части функции. Кроме того, данный подход позволяет определить расположение графика функции относительно наклонной асимптоты. Рассмотрим функцию примера 4 ($y = \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1}$). Разделив числитель на знаменатель, получим $y = 2x + \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$, где целая часть функции y = 2x является наклонной асимптотой. Как видно, при достаточно больших положительных значениях x значение функции больше чем значение асимптоты, что говорит о расположении графика функции выше, чем наклонная асимптота. Аналогично, при $x \to -\infty$ значение функции меньше значения асимптоты y = 2x, следовательно график функции расположен ниже указанной асимптоты (рис. 8).

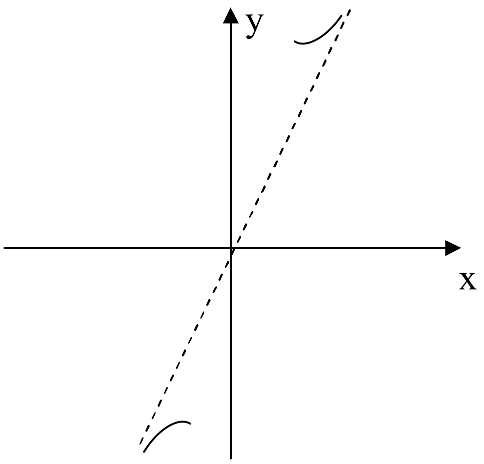


Рис. 8.

8. Определение интервалов монотонности и экстремумов функции.

Определение промежутков монотонности функции проводится с использованием первой производной.

Вспомним правила дифференцирования.

1. Производная постоянной величины равна нулю, т.е. $c' = 0$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т.е. $(cu)' = cu'$.
3. Производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций, т.е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т.е. $(uv)' = u'v + uv'$.
5. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, при условии, что $v \neq 0$.
6. Производная сложной функции вычисляется по формуле: $F(f(x))' = F'_f \cdot f'_x$.

Пример 1. Найти производную функции $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$ **.**

При дифференцировании используем формулу правила 5:

$$y' = \frac{(x^3+2)'(x^2-1)-(x^3+2)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sin(x^3)$.

Используем формулу правила 6. Обозначим внутреннюю функцию $f = x^3$. Тогда $y' = \cos(f)\cdot f' = \cos(x^3)\cdot 3x^2$.

Пример 3. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{\ln 9x}$. Эту функцию можно представить в виде $y = (\ln 9x)^{\frac{1}{3}}$. Отметим, что здесь две внутренние функции: ln( ) и 9x. Обозначим $f_1 = \ln(9x)$, $f_2 = 9x$. Тогда $y' = \frac{1}{3}(\ln 9x)^{-\frac{2}{3}}\cdot f'_{1,f_2}\cdot f'_{2,x} = \frac{1}{3}(\ln 9x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{9x}\cdot 9$. Отметим, что после приобретения определенных навыков, введение внутренних функций не является обязательным. Рассмотрим более сложный

Пример 4. Найти производную функции $y = e^{tg5x}\cdot arctg(x^3)$. Используя формулу производной произведения, получаем

$$y' = (e^{tg5x})'\cdot arctg(x^3) + e^{tg5x}\cdot(arctg(x^3))' = e^{tg5x}\cdot\frac{1}{\cos^2(5x)}\cdot 5\cdot arctg(x^3) +$$

$$+ e^{tg5x}\cdot\frac{1}{1+(x^3)^2}\cdot 3x^2$$

Достаточное условие возрастания (убывания) функции.

Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка, то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

Пример. Найти интервалы монотонности функции $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение. $y' = 2x - 4$. Очевидно, что $y' > 0$ при $x > 2$ и $y' < 0$ при $x < 2$, т.е. функция убывает на интервале $(-\infty;2)$ и возрастает на интервале $(2;\infty)$, где $x = 2$ - абсцисса вершины параболы.

Экстремум функции.

Точка x_0 называется точкой **максимума (минимума)** функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x) \le f(x_0)$, $(f(x) \ge f(x_0))$.

Значение функции в указанной точке называется максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум функции объединяют общим названием экстремум функции.

Экстремум функции часто называют локальным экстремумом, так как на одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем минимум в одной точке может оказаться больше чем максимум в другой точке.

Необходимое условие экстремума функции. Для того, чтобы функция y = f(x) имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума, называются **критическими.**

Достаточное условие экстремума. Если при переходе через критическую точку x_0 производная дифференцируемой функции y = f(x) меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции y = f(x), если с минуса на плюс, то – точка минимума. Если при переходе через критическую точку x_0 производная не меняет знак, то эту точку иногда называют точкой горизонтального перегиба (рис. 9).

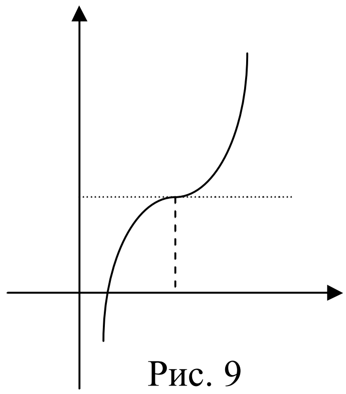


Рис. 9

Исходя из выше сказанного, можно привести общую схему исследования функции на промежутки монотонности и экстремумы.

1. Найти производную $y' = f'(x)$.
2. Найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует
3. Разбить область определения функции критическими точками на промежутки и выяснить знак производной на каждом из промежутков, после чего сделать вывод о возрастании, убывании и экстремумах функции.
4. Найти значения функции в точках экстремума.

Пример. Исследовать на монотонность и экстремум функцию $y = \frac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9)$.

Пользуясь указанной схемой, получим:

1. $y' = \frac{1}{4}(3x^2 + 18x + 15)$.
2. Приравнивая производную к нулю и решая полученное квадратное уравнение $x^2 + 6x + 5 = 0$, получим две критические точки $x_1 = -5; x_2 = -1$.

3. Разбиваем область определения функции (вся числовая прямая) критическими точками на промежутки и по изменению знака производной в них выявляем промежутки монотонности и наличие экстремума:

4. $y_{max} = y(-5) = \dfrac{1}{4}((-5)^3 + 9(-5)^2 + 15(-5) - 9) = 4$;

$y_{min} = y(-1) = \dfrac{1}{4}((-1)^3 + 9(-1)^2 + 15(-1) - 9) = -4$.

x	$(-\infty,-5)$	-5	(-5,-1)	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f(x)	↗	max y = 4	↘	min y = -4	↗

Отметим, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9) = \infty$,

а $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9) = -\infty$,

поэтому график функции $y = \dfrac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9)$ имеет вид (рис. 10):

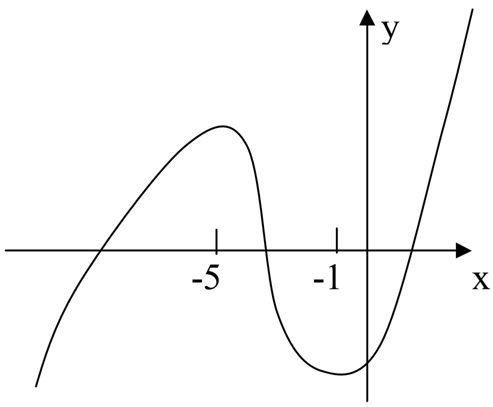


Рис. 10.

9. Интервалы выпуклости и точки перегиба. Говорят, что на промежутке $(a;b)$ функция $y = f(x)$ **выпукла вверх (выпукла вниз),** если на этом промежутке все касательные к графику функции $y = f(x)$ лежат выше (соответственно ниже) самого графика (рис. 11- а,б):

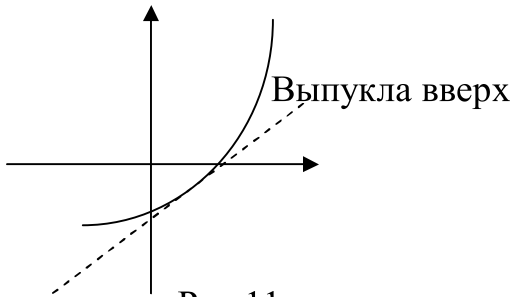


Рис 11-а.

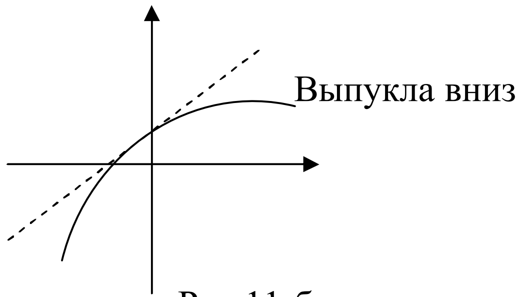


Рис 11-б.

Для отыскания интервалов выпуклости используют **достаточное условие выпуклости** функции: Если вторая производная $f''(x)$ существует на интервале $(a;b)$ и не меняет знак на этом интервале, то:

при $f''(x)>0$ функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a;b)$;
при $f''(x)<0$ функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале $(a;b)$.

Точкой перегиба графика функции $y=f(x)$ называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх. На рис.12 изображен график функции, имеющий перегиб в точке $(x_0;y_0)$.

Отметим, что точки перегиба могут быть только в тех точках, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует. При этом, если при переходе через такую точку вторая производная меняет знак на противоположный, то это является гарантией существования точки перегиба.

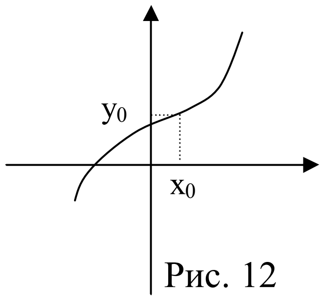
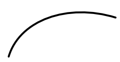


Рис. 12

Пример исследования функции на выпуклость и точки перегиба. Пусть $y=\frac{1}{4}(x^3+9x^2+15x-9)$. Тогда очевидно, что $y''=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$. Приравнивая вторую производную к нулю, найдем критические точки II-го рода: $\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=0$, откуда $x=-3$. Составим вспомогательную таблицу:

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;+\infty)$
y''	-	0	+
y		Перегиб	

Из таблицы видно, что $x=-3$ - точка перегиба. Найдем значение функции y в этой точке:

$y(-3)=\frac{1}{4}((-3)^3+9(-3)^2+15(-3)-9)=0$. Таким образом, заданная функция имеет перегиб в точке $(-3;0)$. Последние действия уточняют поведение графика данной функции, изображенного на рис. 10.

Отметим, что в ряде случаев вторая производная слишком громоздка, поэтому ее исследование не представляется возможным

10. Характерные точки графика.

Характерными точками графика являются точки его пересечения с осями координат, а в некоторых случаях и с асимптотами. Точкой пересечения с осью y является значение y = f(x); решения уравнения f(x) = 0 являются точками пересечения графика с осью x.

Приведем несколько примеров исследования функций и построения их графиков.

Пример 1. Исследовать функцию $y = \frac{2x-1}{1-x}$ и построить ее график.

Областью определения функции являются все действительные числа, за исключением x = 1. Так как при этом значении x числитель не обращается в 0, а знаменатель равен нулю, то прямая x = 1 является точкой разрыва второго рода и вертикальной асимптотой исследуемой функции.

Множество значений данной функции определить достаточно сложно, поэтому этот пункт мы пропускаем.

Функция является функцией общего вида, так как область определения не симметрична относительно нуля.

Вопрос о периодичности для данной функции снимается.

Рассмотрим поведение функции на бесконечности. Так как

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{1-x} = -2$, прямая y = –2 является горизонтальной асимптотой.

Отметим, что
$$\begin{array}{r|l} -\;2x-1 & \underline{1-x} \\ \underline{2x-2} & -2 \\ 1 & \end{array}$$

Таким образом, $y = \frac{2x-1}{1-x} = -2 + \frac{1}{1-x}$. При достаточно больших x последнее слагаемое отрицательно, поэтому исследуемая функция приближается к горизонтальной асимптоте снизу при $x \to \infty$. При больших по модулю отрицательных значениях x ситуация противоположна: последнее слагаемое положительно, поэтому исследуемая функция приближается к горизонтальной асимптоте сверху при $x \to -\infty$.

При наличии горизонтальной асимптоты вопрос о наклонной асимптоте снимается.

Рассмотрим поведение функции около вертикальной асимптоты. Односторонние пределы равны:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{2x-1}{1-x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1-0} \frac{2x-1}{1-x} = \infty.$$

Исследуем функцию на монотонность и выясним наличие ее экстремумов.

$$y' = \frac{(1-x)2-(2x-1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Очевидно, что производная на области определения всегда больше нуля, поэтому функция всегда возрастает.

$y'' = \dfrac{1}{(1-x)^3}$. При x > 1 $y'' < 0$, поэтому функция выпукла вверх, При x < 1 $y'' > 0$, поэтому функция выпукла вниз.

Определим характерные точки графика. Приравняв числитель функции нулю, получаем x = 0,5 – это точки пересечения с осью x. При x = 0 y = –1 – точка пересечения с осью y.

Объединяя полученные результаты, построим график функции (см. рис. 13)

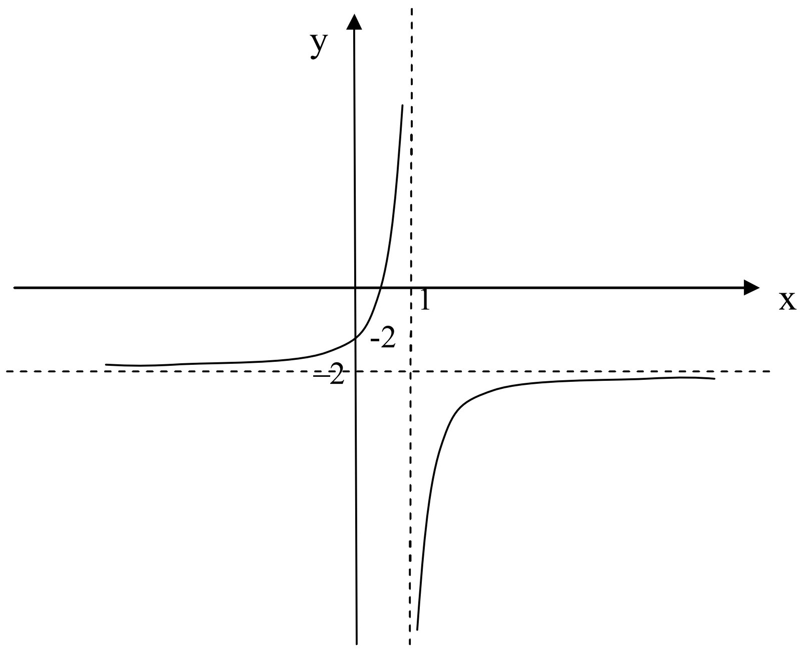


Рис. 13.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \dfrac{x-2}{x^2+3}$ и построить ее график.

Областью определения функции являются все действительные числа. При всех x функция непрерывна. Множество значений данной функции определить достаточно сложно, поэтому этот пункт мы пропускаем.

Функция является функцией общего вида, так как в числителе находится разность нечетной и четной функций.

Вопрос о периодичности для данной функции снимается.

Рассмотрим поведение функции на бесконечности. Так как

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{x^2+3} = 0$, прямая y = 0 является горизонтальной асимптотой.

При достаточно больших x значения функции положительны, поэтому исследуемая функция приближается к горизонтальной асимптоте сверху при $x \to \infty$. При больших по модулю отрицательных значениях x ситуация противоположна: последнее слагаемое положительно, поэтому исследуемая функция приближается к горизонтальной асимптоте снизу при $x \to -\infty$.

При наличии горизонтальной асимптоты вопрос о наклонной асимптоте снимается.

Исследуем функцию на монотонность и выясним наличие ее экстремумов.

$$y' = \frac{(x^2+3)\cdot 1-(x-2)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+4x+3}{(x^2+3)^2}\ .$$

Приравняем нулю производную и найдем критические точки. $x^2-4x-3=0$, $x = 2 \pm \sqrt{7}$. Приблизительные значения критических точек равны $x_1 \approx 4{,}6$, $x_1 \approx -0{,}6$. Таким образом, производную функции можно представить в виде: $y' = \dfrac{-(x-4{,}6)(x+0{,}6)}{(x^2+3)^2}$. Вычислим значения **функции** в критических точках: $y(4{,}6) = 0{,}1$, $y(-0{,}6) =-0{,}8$.

x	$(-\infty; -0{,}6)$	–0,6	$(-0{,}6; 4{,}6)$	4,6	$(4{,}6; \infty)$
y′	–	0	+	0	–
y	$\searrow$	min y=–0,8	$\nearrow$	max y=0,1	$\searrow$

Вторая производная данной функции слишком сложна, поэтому вопрос о выпуклости и вогнутости функций мы оставим открытым.

Определим характерные точки графика. Приравняв числитель функции нулю, получаем x = 2 – это точка пересечения с осью x.

При x = 0 y = –2/3 – это точка пересечения с осью y.

Объединяя полученные результаты, построим график функции (см. рис. 14).

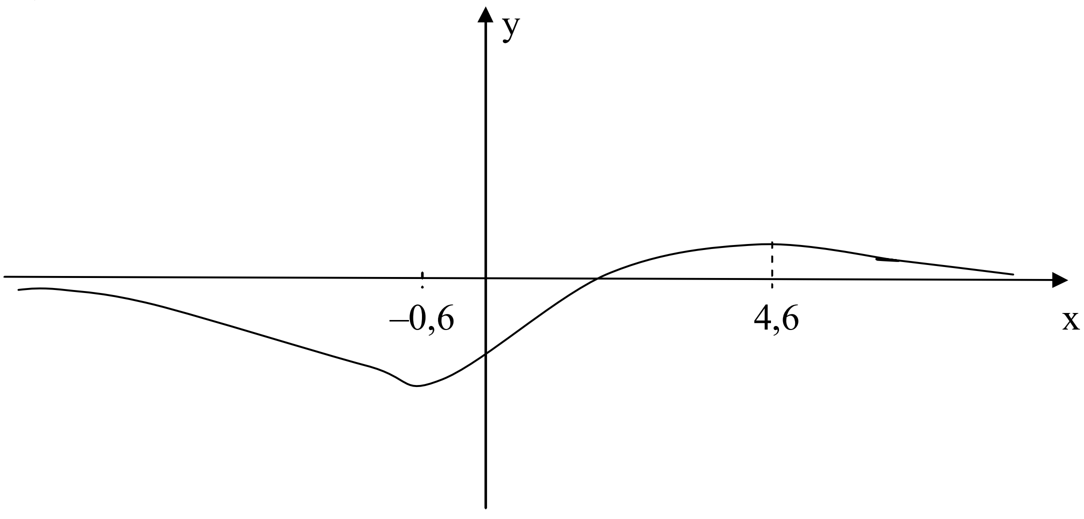


Рис. 14.

Пример 3. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

Областью определения функции являются все действительные числа, за исключением x = 2 и x = –2. Так как при этих значения x числитель не обращается в 0, а знаменатель равен нулю, то прямые x = 2 и x = –2 являются точками разрыва второго рода и вертикальными асимптотами исследуемой функции.

Множество значений данной функции определить достаточно сложно, поэтому этот пункт мы пропускаем.

Функция является функцией общего вида, так как в числителе находится разность четной и нечетной функций.

Вопрос о периодичности для данной функции снимается.

Рассмотрим поведение функции на бесконечности. Так как

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4} = 1$, прямая y = 1 является горизонтальной асимптотой.

Отметим, что

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2 - x & \underline{x^2 - 4} \\ \underline{x^2 - 4} & \quad 1 \\ -x + 4 & \end{array}$$

Таким образом, $y = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4} = 1 + \dfrac{4 - x}{x^2 - 4}$. При достаточно больших x последнее слагаемое отрицательно, поэтому исследуемая функция приближается к горизонтальной асимптоте снизу при $x \to \infty$. При больших по модулю отрицательных значениях x ситуация противоположна: последнее слагаемое положительно, поэтому исследуемая функция приближается к горизонтальной асимптоте сверху при $x \to -\infty$.

При наличии горизонтальной асимптоты вопрос о наклонной асимптоте снимается.

Рассмотрим поведение функции около вертикальных асимптот. Для этого ее удобнее представить в виде $y = \dfrac{x^2 - x}{(x-2)(x+2)}$.

Односторонние пределы равны:

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2 - x}{(x-2)(x+2)} = \infty, \qquad \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2 - x}{(x-2)(x+2)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -2+0} \frac{x^2 - x}{(x-2)(x+2)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -2-0} \frac{x^2 - x}{(x-2)(x+2)} = \infty.$$

Исследуем функцию на монотонность и выясним наличие ее экстремумов.

$$y' = \frac{(x^2-4)(2x-1)-(x^2-x)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-8x+4}{(x^2-4)^2}\ .$$

Приравняем нулю производную и найдем критические точки. $x^2-8x+4=0$, $x = 4 \pm \sqrt{12}$. Приблизительные значения критических точек равны $x_1 \approx 7{,}5$, $x_1 \approx 0{,}5$. Таким образом, производную функции можно представить в виде: $y' = \frac{(x-7{,}5)(x-0{,}5)}{(x^2-4)^2}$. Вычислим значения **функции** в критических точках: $y(7{,}5) = 0{,}9$, $y(0{,}5) = 0{,}7$.

x	$(-\infty; 0{,}5)$	0,5	$(0{,}5; 7{,}5)$	7,5	$(7{,}5; \infty)$
y′	+	0	–	0	+
y	↗	max y=0,7	↘	min y=0,9	↗

Вторая производная данной функции слишком сложна, поэтому вопрос о выпуклости и вогнутости функций мы оставим открытым.

Определим характерные точки графика. Приравняв числитель функции нулю, получаем x = 0 и x = 1 – это точки пересечения с осью x. Приравняв функцию единице, получим точку пересечения графика с горизонтальной асимптотой: $\frac{x^2-x}{x^2-4} = 1$. Отсюда x = 4.

Объединяя полученные результаты, построим график функции (см. рис. 15) .

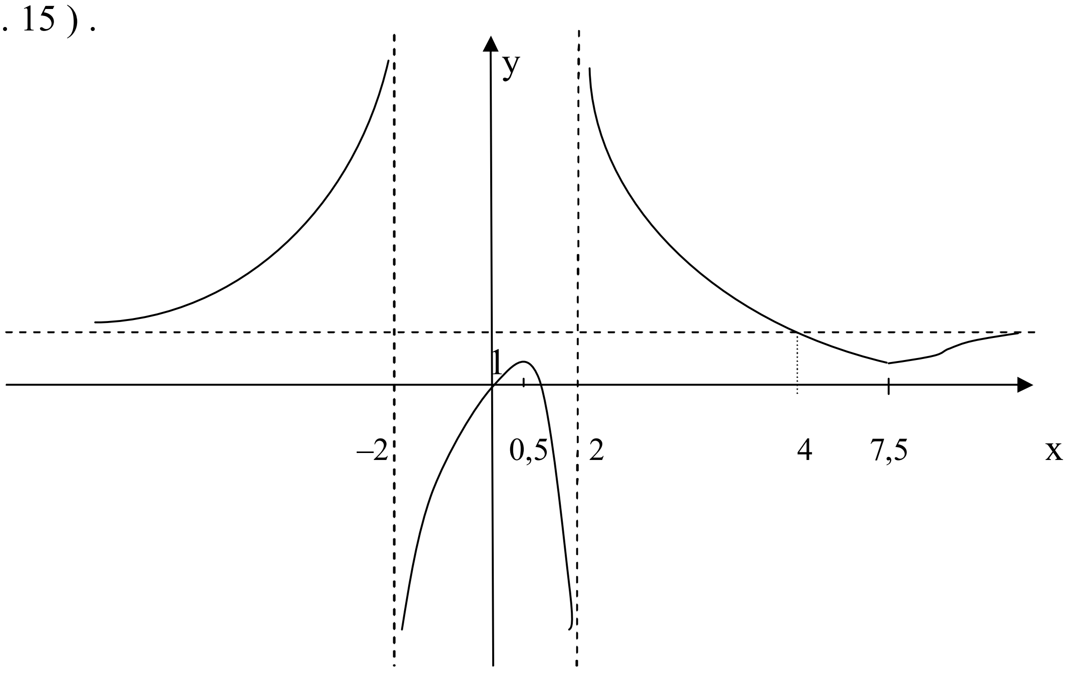


Рис. 15

Пример 4. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2+2x}{1-x}$ и построить ее график.

Областью определения функции являются все действительные числа, за исключением x = 1. Так как при этом значении x числитель не обращается в 0, а знаменатель равен нулю, то прямая x = 1 является точкой разрыва второго рода вертикальной асимптотой исследуемой функции.

Как и в предыдущем примере, множество значений данной функции определить достаточно сложно, поэтому этот пункт мы пропускаем.

Функция является функцией общего вида, так как в числителе находится сумма четной и нечетной функций.

Вопрос о периодичности для данной функции также снимается.

Рассмотрим поведение функции на бесконечности. Так как степень числителя на единицу больше степени знаменателя, то исследуем функцию на наличие наклонной асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x-x^2}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{1-x}=-3.$$

Поэтому прямая $y=-x-3$ является горизонтальной асимптотой.

Отметим, что

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2+2x & \underline{-x+1} \\ \underline{x^2-x\;\;} & -x-3 \\ -\,3x & \\ \underline{3x-3} & \\ 3 & \end{array}$$

Таким образом, $y=\dfrac{x^2+2x}{1-x}=-x-3+\dfrac{3}{1-x}$. Как видно из последнего равенства, при достаточно больших x последнее слагаемое стремится к нулю, поэтому исследуемая функция приближается к прямой $y=-x-3$. Отметим также, что при достаточно больших x последнее слагаемое отрицательно, поэтому исследуемая функция приближается к вертикальной асимптоте снизу при $x\to\infty$. При больших по модулю отрицательных значениях x ситуация противоположна: последнее слагаемое положительно, поэтому исследуемая функция приближается к наклонной асимптоте сверху при $x\to-\infty$.

Рассмотрим поведение функции около вертикальной асимптоты.

Односторонние пределы равны:

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2+2x}{1-x}=-\infty\,,\qquad \lim_{x\to1-0}\frac{x^2+2x}{1-x}=\infty\,.$$

Исследуем функцию на монотонность и выясним наличие ее экстремумов.

$$y' = \frac{(1-x)(2x+2)-(x^2+2x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x+2}{(1-x)^2}\ .$$

Приравняем нулю производную и найдем критические точки. $-x^2+2x+2$=0, x = $1 \pm \sqrt{3}$. Приблизительные значения критических точек равны $x_1 \approx 2{,}7$, $x_1 \approx -0{,}7$. Таким образом, производную функции можно представить в виде: $y' = \dfrac{-(x-2{,}7)(x+0{,}7)}{(1-x)^2}$. Вычислим значения **функции** в критических точках: y(2,7) = –7,5 , y(–0,7) = –0,5.

x	$(-\infty; -0{,}7)$	–0,7	$(-0{,}7; 2{,}7)$	2,7	$(2{,}7; \infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↘	min y=–0,5	↗	max y=–7,5	↘

Вторая производная данной функции слишком сложна, поэтому вопрос о выпуклости и вогнутости функций мы оставим открытым.

Определим характерные точки графика. Приравняв числитель функции нулю, получаем x = 0 и x = –2 – это точки пересечения с осью x. Объединяя полученные результаты, построим график функции (см. рис. 16) .

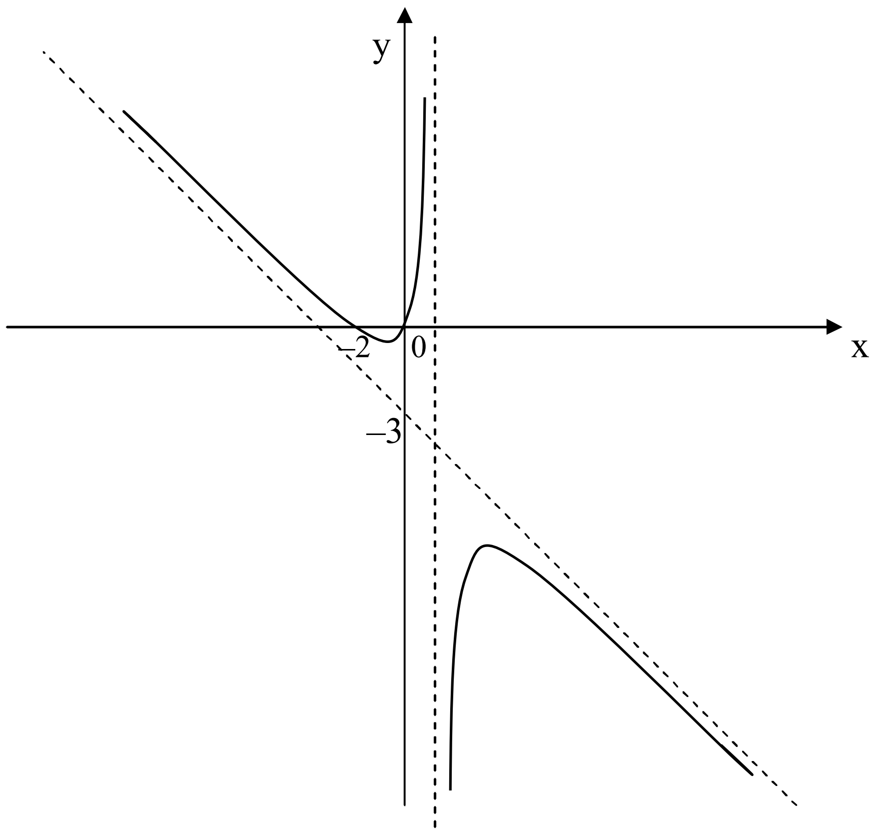


Рис. 16.

Ниже приведены задания для выполнения типовых расчетов по данной теме. Студенты выбирают номер задания по своему номеру по списку в журнале группы. Если в задании встречается параметр **m, то m=1**

Задание №1.
Найти производные функций

1	а) $y=\ln^{2m}\sin(mx+3)$ б) $y=2^{\arcsin(4mx)}\cdot tg(mx^2)$ в) $y=\frac{2m+1}{\sqrt[2m]{\sin(m+1)x^3}}$ г) $y=\frac{ctg(3x^{2m})}{\log_{6m}(x^4)}$ д) $y=x^{\frac{2}{mx}}$	**16**	а) $y=\log_{4m}\sqrt{ctgx^m}$ б) $y=\arcsin(\frac{x}{4m})\cdot\sqrt{5^{2mx}+2}$ в) $y=\frac{3m-1}{\sqrt{\cos(mx^4)}}$ г) $y=\frac{4e^{(2m+1)x}}{tg(3x^{m+2})}$ д) $y=(\ln(mx))^x$
2	а) $y=\log_m\cos\sqrt{x+m^2}$ б) $y=\sin^3(\frac{x}{m})\cdot e^{-mctgx}$ в) $y=\frac{3m}{\sqrt[4m]{\arcsin(x^m)}}$ г) $y=\frac{tg^2\sqrt[m]{x}}{-4^{3m-x}}$ д) $y=x^{\sin(mx)}$	**17**	а) $y=\sqrt[2m]{ctg(2+mx)}$ б) $y=\cos(e^{\frac{x}{m}})\cdot\log_6(1-3mx)$ в) $y=\frac{4m+2}{\sqrt[2m]{3^{(m+2)x}}}$ г) $y=\frac{\arccos\sqrt{4mx}}{\ln(x^{3m+5})}$ д) $y=(tgmx)^{4x}$
3	а) $y=tg^m\cos(mx+4)$ б) $y=\ln(3x^{2m})\cdot\sqrt{1-\sin(m+1)x}$ в) $y=\frac{5m-1}{\sqrt[2m]{\log_3(m+2x)}}$ г) $y=\frac{\sqrt{ctg(2m+1)x}}{4e^{3mx}}$ д) $y=(\cos(2mx))^{2x}$	**18**	а) $y=\ln\sqrt[2m]{\cos(x^m)}$ б) $y=tg\sqrt{(m+1)x}\cdot e^{\arcsin(mx)}$ в) $y=\frac{3m+2}{\sqrt[4m]{ctg(4m+1)x^2}}$ г) $y=\frac{5^{mx^2}}{\log_m(2-mx^3)}$ д) $y=(x^2)^{-m\sin x}$

4	а) $y=\mathrm{arctg}^{m}(\sin(4mx))$ б) $y=\sqrt{2-3^{(m+1)x}}\cdot\cos(\frac{mx^2}{3})$ в) $y=\dfrac{m-1}{\sqrt[4m]{\mathrm{tg}(2mx)}}$ г) $y=\dfrac{e^{\arcsin(2m+1)x}}{\mathrm{ctg}(x^{4m})}$ д) $y=(\mathrm{tg}x)^{3mx}$	**19**	а) $y=\log_3\mathrm{tg}(4x^{m})$ б) $y=\arccos\sqrt{2mx}\cdot\sin((m+7)x$ в) $y=\dfrac{2m+4}{\sqrt{\ln((m+5)x)}}$ г) $y=\dfrac{\mathrm{tg}e^{(m+1)x}}{\cos\sqrt{mx^3}}$ д) $y=(2mx)^{-\frac{1}{x^3}}$
5	а) $y=\sqrt[2m]{\sin(5x^{m})}$ б) $y=\log_{4m}((2+m)x)\cdot\mathrm{tg}e^{mx^2}$ в) $y=\dfrac{m+3}{\sqrt{\arccos(3+2m)x}}$ г) $y=\dfrac{(2m)^{\sin(mx)}}{\cos(3m-1)x^3}$ д) $y=(4m\,\mathrm{ctg}x)^{5x}$	**20**	а) $y=\mathrm{ctg}\sqrt[4m]{\sin(2mx)}$ б) $y=\sqrt{1-2mx^3}\cdot\ln\mathrm{tg}(\frac{3x}{m})$ в) $y=\dfrac{5m-3}{\sqrt[2m]{\arcsin(1+m^2)x}}$ г) $y=\dfrac{\sin(4m-x^5)}{e^{\sqrt{3\ln(mx)}}}$ д) $y=x^{\ln(mx)}$
6	а) $y=\log_{2m}\sin((m+1)x)$ б) $y=e^{\mathrm{arctg}mx}\cdot\mathrm{ctg}\sqrt{2x-m}$ в) $y=\dfrac{3m-2}{\sqrt[4m]{\cos(m+1)x^2}}$ г) $y=\dfrac{\ln(x^{2m})}{5^{\sin(mx)}}$ д) $y=(mx+1)^{\frac{2}{x}}$	**21**	а) $y=\arcsin^{3m}(\mathrm{tg}(m^2x))$ б) $y=\cos(mx^4)\cdot e^{\sqrt{x^m}}$ в) $y=\dfrac{2m+1}{\sqrt[4m]{\log_3(4+m)x^3}}$ г) $y=\dfrac{3^{\mathrm{ctg}(4m+2)x}}{\sin(\ln(6mx))}$ д) $y=\left(\dfrac{3m}{x}\right)^{-\cos x}$
7	а) $y=\sqrt[4m]{\mathrm{arctg}(m^{x})}$ б) $y=\ln(\mathrm{tg}(\frac{x}{m}))\cdot\sqrt{1-2mx}$ в) $y=\dfrac{8-m}{\sqrt[2m]{e^{(4m+1)x}}}$ г) $y=\dfrac{\cos(mx^5)}{\mathrm{ctg}\sqrt{mx}}$ д) $y=(x^{2m})^{\sin x}$	**22**	а) $y=\cos\sqrt[2m]{2x^{m+1}}$ б) $y=\sin(e^{mx})\cdot\mathrm{ctg}((m+4)x^3)$ в) $y=\dfrac{4m+5}{\sqrt{\cos(x^{2m+1})}}$ г) $y=\dfrac{\mathrm{tg}(8x^{m+3})}{\arcsin(5m-1)x^2}$ д) $y=x^{\frac{1}{4mx}}$

8	а) $y=\ln^{3m}(\cos(x^m))$ б) $y=\sin((m+2)x^2)\cdot\arccos(\frac{x}{2m})$ в) $y=\frac{5m}{\sqrt[4m]{6^{(m+2)x}}}$ г) $y=\frac{tge^{mx}}{\ln(x^{m+3})}$ д) $y=(3x)^{\frac{m}{x^2}}$	**23**	а) $y=\log_{3m-1}(tg(2mx))$ б) $y=\ln\sin(\frac{2x}{m})\cdot\sqrt{1-(m+3)x}$ в) $y=\frac{m+3}{\sqrt[2m]{tg(x^{4m+1})}}$ г) $y=\frac{\arccos\sqrt{mx+1}}{e^{ctg(m+2)x}}$ д) $y=(\sqrt{mx})^{5x}$
9	а) $y=e^{\sqrt[2m]{m+\ln x}}$ б) $y=\sqrt{1+tg(m+3)x}\cdot 5^{\ln mx^2}$ в) $y=\frac{4+m}{\sqrt[2m]{\log_4(2x^m)}}$ г) $y=\frac{2^{\cos(m+1)x}}{\arcsin\sqrt{mx}}$ д) $y=(4+mx^2)^{x^2}$	**24**	а) $y=\sqrt[2m]{\arccos(m^x)}$ б) $y=6^{\sin(mx)}\cdot\log_2((1+2m)x^4)$ в) $y=\frac{7-m}{\sqrt[4m]{e^{(m+1)x}}}$ г) $y=\frac{\sin(2x^{m+4})}{tg(7-m)x^3}$ д) $y=(\ln x^2)^{3mx}$
10	а) $y=\frac{1}{3m}\sqrt{(2+m\ln x)^3}$ б) $y=arctg(2m+1)x\cdot e^{\sqrt{\ln(mx)}}$ в) $y=\frac{m}{\sqrt[4m]{\arccos(2mx)}}$ г) $y=\frac{\ln 4x^{3m}}{\sin(m+2)x^2}$ д) $y=\left(\frac{1}{x^m}\right)^{\sin x}$	**25**	а) $y=\ln^{2m+1}(\sin(4x^m))$ б) $y=tg(mx^2)\cdot\sqrt{4+\cos(m+2)x}$ в) $y=\frac{3m+3}{\sqrt{\arcsin(x^{m+2})}}$ г) $y=\frac{\cos 7x^{2m}}{5^{\sin(mx+2)}}$ д) $y=(2+x^{2m})^{\cos x}$
11	а) $y=\ln(e^{2mx}+m^2)$ б) $y=3^{-m\sin x}\cdot\sqrt{2m+ctgx}$ в) $y=\frac{2m+1}{\sqrt{\sin(3x^m)}}$ г) $y=\frac{\arccos(mx^3)}{ctg(4x^{m+1})}$ д) $y=x^{\frac{-5m}{x}}$	**26**	а) $y=(4m+2)e^{\sqrt{\ln(m^2x)}}$ б) $y=\ln(4x^m)\cdot\sin^2((m+3)x$ в) $y=\frac{4m+1}{\sqrt[2m]{tg(m+3)x^2}}$ г) $y=\frac{\log_5(7-m)x^6}{\arccos(e^{2mx+1})}$ д) $y=(ctg3x)^{-mx}$

12	а) $y=\mathrm{ctg}^{2m}(\cos(m+1)x)$ б) $y=e^{\sqrt{m\ln x}}\cdot \mathrm{arctg}(x^m)$ в) $y=\dfrac{3m}{\sqrt[2m]{\log_5(2+m)x^2}}$ г) $y=\dfrac{3^{\sin(2m+1)x}}{\mathrm{tg}\sqrt{5mx}}$ д) $y=(m^2x)^{\cos 2x}$	**27**	а) $y=\dfrac{2}{m+1}\sqrt{(3\sin x-m^2)^5}$ б) $y=\cos^3(2mx)\cdot e^{\mathrm{tg}(m+1)x}$ в) $y=\dfrac{m+2}{\sqrt[4m]{\arcsin(x^{2m+1})}}$ г) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}(9x^{3m+5})}{\ln\sin(4m+2)x}$ д) $y=(mx^2)^{\sqrt{x}}$
13	а) $y=(3m)^{\arcsin x^m}$ б) $y=\mathrm{ctg}(\frac{mx^3}{3})\cdot \arccos\sqrt{(m+1)x}$ в) $y=\dfrac{m+3}{\sqrt[4m]{\mathrm{tg}(8-m)x^3}}$ г) $y=\dfrac{\ln(2m+1)x^2}{e^{\sqrt{mx+1}}}$ д) $y=(\sin x)^{4mx}$	**28**	а) $y=\ln(6m-e^{x^m})$ б) $y=\sqrt{4-2^{mx}}\cdot \mathrm{arctg}(x^m)$ в) $y=\dfrac{5m-1}{\sqrt{7^{(2m+1)x}}}$ г) $y=\dfrac{\mathrm{tg}(8x^{m+2})}{\sin(4m+3)x^2}$ д) $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\cos 2mx}$
14	а) $y=\log_{m+2}(\mathrm{tg}(4mx))$ б) $y=\sqrt{\cos(mx^4)}\cdot e^{\sin x^{2m}}$ в) $y=\dfrac{9-m}{\sqrt{\arcsin(2mx)}}$ г) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}(3m-1)x^3}{\sin(4x^{m+1})}$ д) $y=(m+x)^{\ln x}$	**29**	а) $y=\mathrm{tg}\sqrt[2m]{\sin(3m+2)x}$ б) $y=\log_9(3x+2m)\cdot\cos(e^{mx})$ в) $y=\dfrac{3m+6}{\sqrt[2m]{\mathrm{arctg}(m+4)x^3}}$ г) $y=\dfrac{\ln(m+x^4)}{3^{\sin(2m+1)x}}$ д) $y=(\mathrm{ctg}x^m)^{-x}$
15	а) $y=\mathrm{ctg}\sqrt[4m]{3+mx}$ б) $y=\cos(3m+1)x\cdot\log_m(5mx)$ в) $y=\dfrac{5m+2}{\sqrt[4m]{e^{(m+4)x}}}$ г) $y=\dfrac{\sin(2mx+5)}{\mathrm{arctg}\sqrt{4mx}}$ д) $y=2x^{\sqrt[2m]{x}}$	**30**	а) $y=(4m)^{m\arccos(x^2)}$ б) $y=e^{3\sin(mx)}\cdot \mathrm{ctg}\sqrt{(2m+1)x}$ в) $y=\dfrac{m+2}{\sqrt[4m]{\ln(2m+5)x}}$ г) $y=\dfrac{\log_3(mx^2)}{\mathrm{tg}(9x^{4m+1})}$ д) $y=(x+5)^{\frac{m}{x}}$

Все дальнейшие задания формулируются следующим образом.

Исследовать и построить график функции.

Указание. Если численные значения асимптот велики, то масштаб по осям x и y могут быть выбраны разными.

Задание №2.

1	$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 10$	16	$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$
2	$y = 2x^2 - 9x^2 + 12x - 5$	17	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$
3	$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 9x + 5$	18	$y = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 8x - 17$
4	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$	19	$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$
5	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$	20	$y = 2x^3 + 6x^2 - 48x + 9$
6	$y = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x - 7$	21	$y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 6$
7	$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$	22	$y = x^3 - 6x^2 - 15x + 8$
8	$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$	23	$y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$
9	$y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{15}{4}x^2 + 9x + 8$	24	$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 12x + 13$
10	$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	25	$y = x^3 + 3x^2 - 24x + 9$
11	$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$	26	$y = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 10$
12	$y = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + 1$	27	$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x - 7$
13	$y = x^3 + 9x^2 + 15x - 9$	28	$y = x^3 - 9x^2 - 21x + 12$
14	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$	29	$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 6$

15	$y=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{8}x^2-3x+7$	30	$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$

Задание №3.

1	$y=\frac{x-m}{x^2+1}$	11	$y=\frac{2x-1}{x^2+m}$	21	$y=\frac{4x-m}{x^2+3}$
2	$y=\frac{x-m}{x^2+2}$	12	$y=\frac{2x}{x^2+m}$	22	$y=\frac{4x+m}{x^2+4}$
3	$y=\frac{x+m}{x^2+3}$	13	$y=\frac{3x+4}{x^2+m}$	23	$y=\frac{mx}{x^2+5}$
4	$y=\frac{x+1}{x^2+m}$	14	$y=\frac{3x-m}{x^2+2}$	24	$y=\frac{5x}{x^2+m}$
5	$y=\frac{mx+3}{x^2+5}$	15	$y=\frac{3x+m}{x^2+3}$	25	$y=\frac{x+5}{x^2+m}$
6	$y=\frac{mx}{x^2+m6}$	16	$y=\frac{mx-2}{x^2+4}$	26	$y=\frac{mx+6}{x^2+2}$
7	$y=\frac{2x-2}{x^2+m}$	17	$y=\frac{3x+m}{x^2+5}$	27	$y=\frac{mx+4}{x^2+4}$
8	$y=\frac{2x-m}{x^2+m}$	18	$y=\frac{mx}{x^2+m}$	28	$y=\frac{mx+1}{x^2+5}$
9	$y=\frac{2mx-3}{x^2+m}$	19	$y=\frac{4x+m}{x^2+m}$	29	$y=\frac{mx}{x^2+m}$
10	$y=\frac{mx+1}{x^2+m}$	20	$y=\frac{4x-m}{x^2+m}$	30	$y=\frac{mx}{x^2+2}$

Задание №4.

1	$y=\frac{2x+m}{x-1}$	11	$y=\frac{2mx+1}{x-1}$	21	$y=\frac{3-mx}{1+x}$

2	$y=\dfrac{2x+1}{x-m}$	12	$y=\dfrac{2mx-1}{x+1}$	22	$y=\dfrac{2+mx}{2-x}$
3	$y=\dfrac{2x+m}{x-1}$	13	$y=\dfrac{mx+2}{x-3}$	23	$y=\dfrac{m+x}{1-2x}$
4	$y=\dfrac{2x-m}{x+1}$	14	$y=\dfrac{mx+1}{1-x}$	24	$y=\dfrac{m-2x}{2x+m}$
5	$y=\dfrac{3x+m}{x-1}$	15	$y=\dfrac{mx+3}{2-x}$	25	$y=\dfrac{m-x}{1+2x}$
6	$y=\dfrac{3x-m}{x+2}$	16	$y=\dfrac{x+m}{2-x}$	26	$y=\dfrac{m-2x}{3+2x}$
7	$y=\dfrac{2x+m}{x-2}$	17	$y=\dfrac{mx+1}{3-2x}$	27	$y=\dfrac{2m-3x}{1+3x}$
8	$y=\dfrac{4x+m}{2x-1}$	18	$y=\dfrac{2mx+3}{1-2x}$	28	$y=\dfrac{3x+m}{1-x}$
9	$y=\dfrac{4x-m}{x+2}$	19	$y=\dfrac{mx+4}{2-3x}$	29	$y=\dfrac{2x+m}{3x-2}$
10	$y=\dfrac{2x+m}{1-x}$	20	$y=\dfrac{m-2x}{3+2x}$	30	$y=\dfrac{x+m}{4x-2}$

Задание №5.

1	$y=\dfrac{6x+m}{x^2-4}$	11	$y=\dfrac{5x+4m}{1-x^2}$	21	$y=\dfrac{mx}{x^2-9}$
2	$y=\dfrac{3m+2x}{x^2-1}$	12	$y=\dfrac{2x^2+m}{3x^2-9}$	22	$y=\dfrac{m+4x}{x^2-16}$
3	$y=\dfrac{2x^2+m}{4x^2-16}$	13	$y=\dfrac{2x-m}{x^2-25}$	23	$y=\dfrac{m+x^2}{x^2-1}$

4	$y=\frac{x+3m}{x^2-9}$	14	$y=\frac{3x^2+m}{x^2-4}$	24	$y=\frac{1+mx^2}{3x^2-3}$
5	$y=\frac{4x+m}{1-x^2}$	15	$y=\frac{x^2+m}{16-2x^2}$	25	$y=\frac{m-3x^2}{9-x^2}$
6	$y=\frac{m+10x^2}{5x^2-20}$	16	$y=\frac{4x-m}{9-x^2}$	26	$y=\frac{mx+8}{x^2-36}$
7	$y=\frac{mx^2+2}{3x^2-12}$	17	$y=\frac{7x+m}{6-6x^2}$	27	$y=\frac{m+6x}{36-4x^2}$
8	$y=\frac{mx-10}{x^2-16}$	18	$y=\frac{x^2+m}{8-2x^2}$	28	$y=\frac{6x+m}{5x^2-5}$
9	$y=\frac{4x+3m}{7x^2-7}$	19	$y=\frac{7x+m}{4-x^2}$	29	$y=\frac{5x^2+m}{3x^2-27}$
10	$y=\frac{2x-m}{x^2-36}$	20	$y=\frac{mx^2+1}{1-4x^2}$	30	$y=\frac{3x+m}{2x^2-32}$

Задание №6.

1	$y=\frac{x^2+m}{x}$	11	$y=\frac{5x^2}{x+m}$	21	$y=\frac{3x^2}{m-x}$
2	$y=\frac{2x^2}{x-m}$	12	$y=\frac{x^2-1}{6x+m}$	22	$y=\frac{x^2+2}{m+x}$

3	$y=\dfrac{x^2+m}{3-3x}$	13	$y=\dfrac{2x^2-4}{x-m}$	23	$y=\dfrac{x^2+6}{m+2x}$
4	$y=\dfrac{m+x^2}{x+4}$	14	$y=\dfrac{x^2+2}{x+m}$	24	$y=\dfrac{4x^2-3}{m+x}$
5	$y=\dfrac{2x^2-m}{x}$	15	$y=\dfrac{3x^2+4}{mx}$	25	$y=\dfrac{x^2-6}{mx}$
6	$y=\dfrac{3x^2+m}{x+2}$	16	$y=\dfrac{x^2+5}{2x-m}$	26	$y=\dfrac{x^2+7}{1-x}$
7	$y=\dfrac{3x^2-m}{x+1}$	17	$y=\dfrac{x^2+8}{4x+m}$	27	$y=\dfrac{5x^2-10}{m-x}$
8	$y=\dfrac{mx^2-1}{3x-6}$	18	$y=\dfrac{x^2-6}{x-m}$	28	$y=\dfrac{3x^2+9}{m+x}$
9	$y=\dfrac{x^2+m}{x+5}$	19	$y=\dfrac{6x^2-3}{3x+m}$	29	$y=\dfrac{x^2+4}{m-4x}$
10	$y=\dfrac{4x^2-m}{x}$	20	$y=\dfrac{2x^2+5}{mx}$	30	$y=\dfrac{x^2+7}{mx}$

Интегральное исчисление

Вычисление определенного интеграла, или нахождение первообразной, – это восстановление функции по известной ее производной. Как известно, эта функция определяется с точностью до произвольной постоянной, т.е. к функциональной части первообразной всегда будет прибавляться некоторая константа, которую будем обозначать символом «C».

В настоящем пособие обучающимся предлагается несколько самостоятельных заданий по вычислению интегралов. Номер интеграла в каждом задании выбирается по номеру в списке группы, число n=1.

Исходя из определения неопределенного интеграла, можно сформулировать

Некоторые свойства неопределенного интеграла

(правила интегрирования)

1°. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, где a – постоянная.

2°. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Используя таблицу производных можно получить

Таблицу основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $n \neq -1$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int e^x dx = e^x + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + b}\right| + C$.

В некоторых простейших примерах после элементарных преобразований можно прийти к табличным интегралам, которые вычисляются по приведенным выше формулам.

В качестве примера рассмотрим следующий интеграл:

$$\int \frac{x^2 + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Используя свойства 1^o и 2^o после очевидных преобразований, получим:

$$\int \frac{x^2+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}dx + 2\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx - 3\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx =$$

$$= \int x^{\frac{5}{3}}dx + 2\int x^{\frac{1}{6}}dx - 3\int x^{\frac{1}{3}}dx.$$

К последним трем интегралам применим формулу 1:
Тогда

$$\int \frac{x^2+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{x^{8/3}}{8/3} + 2\frac{x^{7/6}}{7/6} - 3\frac{x^{4/3}}{4/3} + C =$$

$$= \frac{3}{8}x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{7}x \cdot \sqrt[6]{x} - \frac{9}{4}x \cdot \sqrt[3]{x} + C.$$

Вычисление интегралов таким способом позволит Вам выполнить **задание 1.**

Если данный интеграл $\int f(x)dx$ не является табличным и не может быть найден способом непосредственного интегрирования, то во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести данный интеграл к табличному. В этом сущность так называемого метода подстановки.

Применение метода подстановки целесообразно, если интеграл «почти» табличный и аргумент подынтегральной функции

Задание 1. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где f(x) **выбирается из таблицы**

	f(x)		f(x)
1	$\frac{1}{nx^2} - nx^3 + 2n$	16	$(nx+3\sqrt{x})/\sqrt{x^3} + 1/(nx^3)$
2	$n/\sqrt[3]{x} - n/x + 4n$	17	$(n+2)x^2/\sqrt[5]{x}+n/x+3$
3	$(x+n)\sqrt[3]{x} + 2nx$	18	$\frac{n\sqrt[3]{x}}{x^3} + \frac{n+1}{\sqrt[4]{x}}$
4	$\frac{nx+\sqrt{x}}{2n\sqrt{x}} - n/x^3$	19	$\frac{x+\sqrt{x}}{2n\sqrt{x}} - 1/(nx^2)$
5	$\frac{n-2nx}{x} + \frac{n+1}{\sqrt[4]{x}}$	20	$(nx+2)\sqrt[3]{x^4} - 5n/x^4$
6	$(nx+n+3)/\sqrt{x} + 1/(nx^2)$	21	$(n\sqrt[3]{x}+x)/\sqrt{x} + 4nx^3\sqrt{x}$

7	$nx/\sqrt[5]{x^2}+\sqrt{x}/(nx)-n$	22	$\dfrac{2n-1}{nx^5}-(n+1)/x+2x/n$
8	$2n\sqrt{x}\sqrt[4]{x}+(3n-1)/\sqrt[3]{x}$	23	$(nx-\sqrt[3]{x})(\sqrt{x}+1/(nx))$
9	$(n-3\sqrt[3]{x})(x+1/n)$	24	$(nx+n\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})/x^2$
10	$(2n+\sqrt[3]{x})(\sqrt{x}-1/n)$	25	$(x\sqrt{x}+nx^3)\sqrt[3]{x}$
11	$\dfrac{6}{nx^3}+2nx^4+2/n$	26	$(n+3)\sqrt[3]{x}-n\sqrt{x}/x+n+2$
12	$(n-x^2)/\sqrt{x}+2x\sqrt{x^3}$	27	$(2nx-1)/\sqrt[4]{x}+nx/\sqrt[3]{x}$
13	$(x^2-2n)\sqrt[3]{x}+3n/x$	28	$3\sqrt{x}/(nx^4)-2/\sqrt[3]{x^5}$
14	$\dfrac{n+3\sqrt{x}}{2n\sqrt{x}}+2n/x^4$	29	$\dfrac{nx+\sqrt{x^3}}{2n\sqrt{x}}+3n/x^2$
15	$\dfrac{n+2x^2}{x^3}+\dfrac{4n}{\sqrt[4]{16x}}$	30	$\dfrac{1+\sqrt{x}}{4n\sqrt{x^3}}-n/x^3$

имеет вид $ax+b$. Например, $\int\sin(3x+5)dx$, $\int e^{-2x+1}dx$, $\int\frac{1}{8x+1}dx$, $\int(7x-5)^{11}dx$. В этом случае замена аргумента $ax+b$ на новую переменную и элементарные преобразования приводят к табличному интегралу. После того, как интеграл найден с помощью подстановки, следует возвратиться к первоначально заданной переменной. В общем случае $\int f(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Пример. $\int\frac{1}{\cos^2(5x+1)}dx$

Воспользуемся подстановкой $t=5x+1$. Тогда $dt=5dx$, откуда $dx=\frac{dt}{5}$.

Таким образом, $\int\frac{1}{\cos^2(5x+1)}dx=C=\frac{1}{5}tg(5x+1)+C$.

Вычисление интегралов таким способом позволит Вам выполнить **задание 2 и 3.**

Метод подстановки также применяется в случае, когда в подынтегральном выражении можно выделить функцию и ее производную: $\int\frac{\sqrt{\mathrm{tg}2x-3}}{\cos^2 2x}dx$, $\int\frac{(\mathrm{arctg}^3x-2)}{1+x^2}dx$, $\int\frac{1}{(2\ln x+7)^3x}dx$.
Для того, чтобы привести данные интегралы к табличным следует функцию принять за новую переменную.

Задание 2. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где f(x) выбирается из таблицы

	f(x)		f(x)
1	$\sqrt[3]{nx}+\sin[(n+1)x]$	16	$\sqrt{2nx}+\cos[(2n-1)x]$
2	$1/(nx+1)-\cos nx$	17	$\frac{n+1}{\cos^2 nx}+2nx+3$
3	$1/(nx^3)+\sin 2nx$	18	$\frac{2n-1}{\sin^2 nx}-3nx^2+6$
4	$\sqrt{nx}+\cos[(2n+1)x]$	19	$1/(3nx^3)+\sqrt[3]{8nx}$
5	$1/\cos^2 nx-5nx-1$	20	$\frac{n+1}{4x^2+n+2}+\sqrt[4]{nx}$
6	$1/\sin^2 nx+6nx^2+n$	21	$\sqrt{nx^3}+1/(nx+8)$
7	$\frac{n}{n+x}+\sqrt[3]{nx}$	22	$\frac{n+2}{2nx+4}+\sqrt[4]{nx^3}$
8	$\frac{n}{2x^2+n}+\sqrt[4]{nx}$	23	$\frac{2n+1}{n+4x^2}-nx/\sqrt[3]{x}$
9	$1/\sqrt[3]{nx}+\cos 2nx$	24	$\frac{1-2n}{4x^2-1}+2nx^2/\sqrt{x}$
10	$1/\sqrt{n-4x^2}+\sqrt[3]{3nx}$	25	$1/\sqrt{4x^2-n}+\sin nx$
11	$\sqrt{2nx-1}+n/\cos^2 nx$	26	$\frac{2n+1}{\sqrt[3]{nx}}+x\sqrt{x}$
12	$n/x^2-1/\sqrt{nx}$	27	$x^3\sqrt{x}-n/x^n$
13	$\sqrt[3]{2nx}+1/(n^2+4nx^2)$	28	$\frac{\sqrt{nx}+nx}{\sqrt{nx}}-\frac{1}{3nx}$
14	$1/\sqrt[3]{nx}+\cos n^2x$	29	$\sqrt[4]{3nx}+1/(nx+4)$

15	$\frac{n+1}{nx^4}+\sin nx$	30	$2n/x^3 - 1/\sqrt{4nx}$

Задание 3. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где f(x) выбирается из таблицы

	f(x)		f(x)
1	$1/\sqrt[n+1]{nx+n+8}$	16	$(4n+1)/((2n+1)x^2+n+2)$
2	$((0.5n+3)x+n+2)^{0.2n+1}$	17	$(nx+1)/(nx-4n+2)$
3	$1/\cos^2(nx+n^2)$	18	$(5n+3)\sin(2n+1-3nx)$
4	$(n+4)/(nx-5)$	19	$\sqrt[3n+1]{4n-1-2nx}$
5	$(n+3)e^{13-nx}$	20	$(4n-3)/(2-(n+2)x^2)$
6	$(2n+1)/\sin^2(nx+n-10)$	21	$(5n-4)/\sqrt{(3nx+1)^2+2n+4}$
7	$(3n-1)/(2nx-10)$	22	$(-3n+2)/\sqrt{2n-(4n+1)x^2}$
8	$(2n+3)/((n+2)x^2+9)$	23	$(-4n+2)/((3n-1)x^2+5)$
9	$(n+2)/\sqrt{n-(n+1)x^2}$	24	$(3n-1)/2nx-1)$
10	$(3n+1)/\sqrt{(nx+1)^2+2n}$	25	$(5n-2)/\sin^2(2nx+n+4)$
11	$(3n+1)/(7-nx^2)$	26	$(4n-2)e^{5-2nx}$
12	$\sqrt[4n-1]{2n+1-nx}$	27	$(3n-2)/(2nx+3)$
13	$(7n-1)\sin(n+2-2nx)$	28	$2n/\cos^2(-3nx+2n^2)$
14	$(x+1)/(nx+n+1)$	29	$((n+2)x-3n+1)^{0.5n+1}$
15	$(2n+3)/(nx^2-2n+1)$	30	$(4n+1)/\sqrt[2n+1]{2nx+n+3}$

Пример. $\int \frac{\sin x}{4+\cos x}dx$.

Воспользуемся подстановкой $t = 4+\cos x$. Тогда $dt = -\sin x dx$ и $\int \frac{\sin x}{4+\cos x}dx = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t| + C = -\ln|4+\cos x| + C$.

Часто, применяя другие методы интегрирования (метод интегрирования по частям, метод выделения полного квадрата), приходим к интегралу вида $\int \frac{ax+b}{cx^2+d}dx$, который равен сумме двух интегралов: один из которых табличный, для нахождения другого используют метод подстановки.

Пример. $\int \frac{2x+3}{4x^2+9}dx = \int \frac{2x}{4x^2+9}dx + \int \frac{3}{4x^2+9}dx$

Для вычисления первого интеграла воспользуемся методом подстановки

$$I_1 = \int \frac{2x}{4x^2+9}dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x^2+9 \\ dt = 8xdx \\ 2xdx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{1}{4t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt =$$

$$\frac{1}{4}\ln|t| + C_1 = \frac{1}{4}\ln(4x^2+9) + C_1.$$

Преобразовав подынтегральную функцию во втором интеграле, получим табличный интеграл.

$$I_2 = \int \frac{3}{4x^2+9}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2+(\frac{3}{2})^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}x + C_2.$$

$$\int \frac{2x+3}{4x^2+9}dx = \frac{1}{4}\ln(4x^2+9) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}x + C.$$

Вычисление интегралов таким способом позволит Вам выполнить **задание 4 и 5**

Задание 4. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где f(x) выбирается из таблицы

	f(x)		f(x)
1	$x/\sqrt[n+2]{nx^2+n-12}$	16	$(4n+1)x/((2n+1)x^2+n+2)$
2	$nx^2((0.4n+3)x^3-4n+2)^{0.2n+1}$	17	$(n+1)x^2/(nx^3-4n+1)$
3	$6x/\cos^2((n+1)x^2+n+2)$	18	$(4n+3)x^2\sin(2n+5-3nx^3)$
4	$nx/(n^2x^2+5+n)$	19	$x\cdot\sqrt[3n+1]{4n+2-2nx^2}$
5	$(n+3)x^2e^{4+nx^3}$	20	$(4n-3)x^2/(2-(n+5)x^3)$
6	$(n+1)x/\sin^2(nx^2+n+3)$	21	$(5n+2)x/\sqrt{3nx^2+n+4}$
7	$(3n-1)x^2/(2nx^3-1)$	22	$(-3n+1)x/\sqrt{2n-(4n+1)x^2}$
8	$(n+3)x^3/((n+2)x^4+n+1)$	23	$(-4n+2)x^4/((3n-1)x^5+5)$
9	$(n+2)x/\sqrt{n+1-(n+1)x^2}$	24	$(3n-1)x^3/(2nx^4+n+1)$
10	$(3n+1)x^2/\sqrt{(nx^3+2n-1}$	25	$(5n-2)x/\sin^2(2nx^2+4)$
11	$(3n+1)x^3/(7+n-nx^4)$	26	$(4n-2)x^2e^{3+2nx^3}$
12	$x\cdot\sqrt[3n-1]{2n+3-nx^2}$	27	$x^3(3n+2)/(2nx^4+3n)$
13	$(5n-1)x^2\sin(n+3-2nx^3)$	28	$2nx/\cos^2(-3nx^2+n^2)$
14	$(n+1)x^3/(nx^4+2n-1)$	29	$x((n+2)x^2-3n+1)^{0.5n+1}$
15	$(2n+3)x/(nx^2+n+1)$	30	$(4n+1)x/\sqrt[2n]{3nx^2+n+3}$

Задание 5. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где *f(x)* выбирается из таблицы

	f(x)		f(x)
1	$(n\ln x+n+1)/x$	16	$\cos x/((3n+2)\sin^2 x+2n-3)$
2	$(n\ln^2 x-n-2)/x$	17	$(n\operatorname{arctg}x+n+1)/(1+x^2)$
3	$(n\cos^2 x+n+5)\sin x$	18	$((n+2)\operatorname{arctg}^2x+n)/(1+x^2)$
4	$((n+2)\cos x+2n+3)\sin x$	19	$(n\arcsin x-n)/\sqrt{1-x^2}$
5	$((2n+1)\sin^2 x+n+2)\cos x$	20	$(3n\arcsin^2 x-6)/\sqrt{1-x^2}$
6	$((n+1)\sin x+3n-1)\cos x$	21	$(1-(3n+1)x)/\sqrt{2nx^2+4}$
7	$(n\operatorname{ctg}^2x+n+1)/\sin^2 x$	22	$(2-3nx)/\sqrt{n-(2n+1)x^2}$
8	$((n+2)\operatorname{ctg}x+3n+1)/\sin^2 x$	23	$n/(x(\ln^2 x+3+n))$
9	$((2n-1)\operatorname{tg}^2x+n+4)/\cos^2 x$	24	$(2n+1)/(x(n\ln x+1))$
10	$((n+3)\operatorname{tg}^2x+2n-1)/\cos^2 x$	25	$3n\cos 2x/(\sin 2x+n+1)$
11	$(nx+n+1)/(x^2+2n)$	26	$n\sin nx/(\cos nx+2n+1)$
12	$(3nx-2n+1)/(1-x^2+2n)$	27	$(2-nx)/\sqrt{n+1+x^2}$
13	$\sin 2x/(n\cos 2x+n+5)$	28	$(2-nx)/\sqrt{n-2x^2}$
14	$\cos x/((n+2)\sin x+n+1)$	29	$(nx+1)/(x^2-2n-1)$
15	$\sin x/(n\cos^2 x-2n+1)$	30	$(4n+x)\big/\sqrt{n+2x^2}$

Метод подстановки применяется в интегралах, в которых подынтегральное выражение есть дробно- рациональная функция и старшая степень числителя больше чем знаменателя, например $\int \frac{cx^3+dx^2+mx+k}{ax+b}dx$. Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть и, применяя свойства неопределенного интеграла, приходим к сумме интегралов: один из которых определяется методом подстановки, а остальные интегралы табличные.

Пример.

$$\int \frac{4x^3+x}{2x+1}dx = \int (2x^2-x+1-\frac{1}{2x+1})dx = 2\int x^2dx - \int xdx + \int dx - \int \frac{1}{2x+1}dx$$

Для последнего интеграла введем подстановку $t=2x+1$, тогда $dt=2dx$ и $dx=\frac{dt}{2}$. Таким образом, $\int\frac{1}{2x+1}dx = \int\frac{1}{2t}dt = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

$$\int\frac{4x^3+x}{2x+1}dx = \frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C.$$

Вычисление интегралов таким способом позволит Вам выполнить **задание 6 и 7.**

Задание 6. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где f(x) выбирается из таблицы

	f(x)		f(x)
1	$\frac{2x^3+x+n}{n+2x}$	16	$\frac{3x^3+2x+n}{n+3x}$
2	$\frac{x^3+nx+1}{x-n}$	17	$\frac{2+nx-x^3}{n-x}$
3	$\frac{4x^3-x-n}{2n-2x}$	18	$\frac{5x^3+2x+n}{5x-n}$
4	$\frac{nx-2x^3+2}{2x-n}$	19	$\frac{3x-3x^3+3n}{2n-3x}$
5	$\frac{x^3+2x^2+nx}{2x+2n}$	20	$\frac{2x^3-x^2-nx}{n-x}$
6	$\frac{3x^3-nx^2+2x}{n-3x}$	21	$\frac{4x^3+x^2-nx}{2x+n}$
7	$\frac{nx^2-x^3+5x}{2n-x}$	22	$\frac{2x^2-2x^3+2n}{n+2x}$
8	$\frac{n-x^2-3x^3}{n-3x}$	23	$\frac{n+x^2-4x^3}{n+4x}$
9	$\frac{x^3+3x^2+2n}{x+2n}$	24	$\frac{-2x^3+x^2-n}{n+2x}$
10	$\frac{2x^3+4x^2+n}{-x+2n}$	25	$\frac{3x^3-x^2-2n}{n-3x}$
11	$\frac{5x^3-5x^2-2n}{5x-n}$	26	$\frac{nx^2-4+4x^3}{2x+n}$

12	$\dfrac{6x^2+3n-x^3}{2x-n}$	27	$\dfrac{6x^3+x^2+n}{3x+n}$
13	$\dfrac{x^3+x^2+1}{nx-1}$	28	$\dfrac{2x^3+nx^2+nx}{n-2x}$
14	$\dfrac{4x^3+8x^2+nx}{4x-n}$	29	$\dfrac{nx-2x^2-3x^3}{3x+n}$
15	$\dfrac{5x^3-10x-nx}{x-2n}$	30	$\dfrac{-2x^3+nx^2-nx}{2n-x}$

Задание 7. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где f(x) выбирается из таблицы

	f(x)		*f(x)*
1	$(x^4+n)/(4x^2+n)$	16	$(2x^4-n)/(6x^2+2n)$
2	$(2n-3x^4)/(3x^2-n)$	17	$(n-5x^4)/(x^2-2n)$
3	$(4x^4+2n)/(2x^2+n)$	18	$(nx^4+2)/(nx^2-4)$
4	$(2x^4+6)/(nx^2-2)$	19	$(6x^4-n)/(3x^2+n+1)$
5	$\dfrac{n+1-x^4}{2x^2-3-n}$	20	$\dfrac{-n-1-2x^4}{3x^2+n}$
6	$(3x^4+2n-1)/(n-x^2)$	21	$(5x^4+n+2)/(-n+x^2)$
7	$\dfrac{(n+3)x^4-4n+3}{n+2-(n+3)x^2}$	22	$\dfrac{(n+2)x^4-3n+2}{n-(n+2)x^2}$
8	$\dfrac{(3n-2)x^4+n}{-4n+2-(3n-2)x^2}$	23	$\dfrac{nx^4+5n-2}{2nx^2+3n-1}$
9	$\dfrac{2x^4+4n-3}{4n-1-4x^2}$	24	$\dfrac{4n-2-3x^4}{3x^2+n}$
10	$\dfrac{4x^4+n+1}{1-8x^2}$	25	$\dfrac{3n+1+5x^4}{-5x^2-n-1}$
11	$\dfrac{2-nx^4}{nx^2+3n-2}$	26	$\dfrac{x^4+6n-5}{3x^2-1}$

12	$(x^4+5n-1)/(3x^2+n)$	27	$(n+1-2x^4)/(n-4x^2)$
13	$\dfrac{3x^4+2n+3}{2x^2+2}$	28	$\dfrac{n^2-4x^4}{4x^2+2n-1}$
14	$\dfrac{(n+1)x^4+4}{2x^2-n}$	29	$\dfrac{5x^4+n}{2n-2x^2}$
15	$\dfrac{4n+1-x^4}{4x^2+2}$	30	$\dfrac{4-3x^4}{5n-4-x^2}$

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

При нахождении интегралов вида $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ и $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ применяется метод выделения полного квадрата, который дает возможность представить квадратный трехчлен в виде суммы:

$$ax^2+bx+c=a(x+\alpha)^2+\beta, \qquad (*)$$

где $\alpha=\frac{b}{2a}$, $\beta=c-\frac{b^2}{4a}$.

Последующая подстановка $t=x+\alpha$ приводит указанные интегралы к табличным интегралам 11-14.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx$.

Так как знаменатель подынтегральной функции содержит квадратный трехчлен $x^2+10x+29$, то следует выделить из него полный квадрат. Для этого воспользуемся равенством $(*)$ и найдем $\alpha=\frac{10}{2\cdot 1}=5$ и $\beta=29-\frac{10^2}{4\cdot 1}=4$. Тогда $x^2+10x+29=(x+5)^2+4$.

Полагая $t=x+5$, будем иметь $x=t-5$ и $dx=dt$. В результате преобразований получим

$$\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx=\int \frac{5x+3}{(x+5)^2+4}dx=\int \frac{5(t-5)+3}{t^2+4}dt=$$

$$=\int \frac{5t-22}{t^2+4}\,dt=\int \frac{5t}{t^2+4}\,dt-\int \frac{22}{t^2+4}\,dt.$$

В первом интеграле произведем замену $z=t^2+4$ и $dz=2tdt$. Тогда,

$$\int \frac{5t}{t^2+4}\,dt = 5\int \frac{tdt}{t^2+4} = \frac{5}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{5}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{5}{2}\ln\left|t^2+4\right| + C_1.$$

Второй интеграл легко находится по формуле 11:

$$\int \frac{22dt}{t^2+4} = 22\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{22}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C_2 .$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx = \frac{5}{2}\ln\left|(x+5)^2+4\right| - 11\operatorname{arctg}\frac{x+5}{2} + C =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left|x^2+10x+29\right| - 11\operatorname{arctg}\frac{x+5}{2} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x+3}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}dx$.

Для нахождения этого интеграла предварительно выделим полный квадрат из квадратного трехчлена $-3x^2+4x-1$. На основании $(*)$ найдем

$\alpha = \frac{4}{2\cdot(-3)} = -\frac{2}{3}$, $\beta = -1 - \frac{4^2}{4\cdot(-3)} = \frac{1}{3}$ и запишем

$-3x^2+4x-1 = -3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$. Положим $t = x - \frac{2}{3}$. Тогда $x = t + \frac{2}{3}$ и $dx = dt$. Отсюда

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}dx = \int \frac{x+3}{\sqrt{-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}}}dx = \int \frac{t+\frac{2}{3}+3}{\sqrt{-3t^2+\frac{1}{3}}}dt =$$

$$= \int \frac{t+\frac{11}{3}}{\sqrt{3\left(-t^2+\frac{1}{9}\right)}}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{tdt}{\sqrt{\frac{1}{9}-t^2}} + \frac{11}{3\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{9}-t^2}}.$$

С помощью подстановки $z = \frac{1}{9} - t^2$ и $dz = -2tdt$ первый интеграл сводится к интегралу вида

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{tdt}{\sqrt{\frac{1}{9}-t^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\int z^{-\frac{1}{2}}dz = -\frac{1}{2\sqrt{3}}2\sqrt{z} + C_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{9}-t^2} + C_1.$$

При вычислении второго интеграла воспользуемся формулой 12:

$$\frac{11}{3\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{9}-t^2}}=\frac{11}{3\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-t^2}}=\frac{11}{3\sqrt{3}}\arcsin 3t+C_2.$$

Остается вернуться к переменной x:

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}dx=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}+\frac{11}{3\sqrt{3}}\arcsin 3\left(x-\frac{2}{3}\right)+$$

$$+C=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}+\frac{11}{3\sqrt{3}}\arcsin\left(3x-2\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{-3x^2+4x-1}+\frac{11}{9}\sqrt{3}\arcsin\left(3x-2\right)+C.$$

Вычисление интегралов таким способом позволит Вам выполнить **задание 8 и 9.**

Задание 8. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где $f(x)$ выбирается из таблицы

	$f(x)$		$f(x)$
1	$(2n+3x)/(x^2+6x-n)$	16	$(-n+3x)/(x^2+2x+6n)$
2	$(2x-2n)/(x^2+4x+6n)$	17	$(-3n-2x)/(x^2-6x-3n)$
3	$(n+3x)/(x^2+8x-2n)$	18	$(2n+x)/(x^2-4x+4n)$
4	$(x-3n)/(x^2+2x+4n)$	19	$(-n-3x)/(x^2+6x-2n)$
5	$(n-2x)/(x^2-6x-4n)$	20	$(x-2n)/(x^2+4x+5n)$
6	$(n+x)/(x^2-4x+3n)$	21	$(4x+2n)/(x^2+2x-n)$
7	$(2x-n)/(x^2-8x-n)$	22	$(4n+x)/(x^2+6x+12n)$
8	$(n-3x)/(x^2-2x+2n)$	23	$(-n+3x)/(x^2+6x-3n)$
9	$(-n-2x)/(x^2+10x-2n)$	24	$(-n-2x)/(x^2+2x+2n)$
10	$((n+3)x-3)/\sqrt{-9x^2-6x+2}$	25	$(n+5x)/(x^2-10x-2n)$

11	$(4x+n)/(x^2+2x-4n)$	26	$(-4n-2x)/(x^2-2x+7n)$
12	$(n+6x)/(x^2+6x+10n)$	27	$((2n+1)x+3)/\sqrt{-4x^2-4x+5n}$
13	$(4n+2x)/(x^2-10x-n)$	28	$(x+n)/(x^2+4x+5n)$
14	$(3n+x)/(x^2-4x-6n)$	29	$(2x-2n)/(x^2-8x-2n)$
15	$(3n+3x)/(x^2+8x-n)$	30	$(3n-x)/(x^2-2x+6n)$

Задание 9. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где $f(x)$ выбирается из таблицы

	$f(x)$		$f(x)$
1	$((2n+1)x+3)/\sqrt{-4x^2-4x+5n}$	16	$(n+3+4x)/\sqrt{4x^2-20x-2n}$
2	$(3n+1+3x)/\sqrt{9x^2-12x+6n}$	17	$((-n-3)x+1)/\sqrt{-9x^2-12x+2n}$
3	$((n+3)x-3)/\sqrt{-9x^2-6x+2n}$	18	$(3n-2-3x)/\sqrt{25x^2-10x-2n}$
4	$(4n-1+5x)/\sqrt{16x^2+8x-6n}$	19	$((2n-3)x-1)/\sqrt{-4x^2+8x+5n}$
5	$((-2n-3)x+5)/\sqrt{-9x^2+12x+n}$	20	$(n+2+4x)/\sqrt{25x^2-20x+6n}$
6	$(2n+2+3x)/\sqrt{25x^2+10x-3n}$	21	$((3n-4)x+2)/\sqrt{-4x^2-4x+3n}$
7	$((n+1)x+4)/\sqrt{-16x^2-8x+2n}$	22	$(n+2-3x)/\sqrt{9x^2-6x-4n}$
8	$(2n-1+5x)/\sqrt{4x^2-8x-2n}$	23	$((4n-3)x+2)/\sqrt{-9x^2-12x+3n}$
9	$((n+3)x+1)/\sqrt{-4x^2+16x+2n}$	24	$(5n-2+x)/\sqrt{16x^2-16x-2n}$
10	$(5n-1+2x)/\sqrt{9x^2-12x-2n}$	25	$((n+5)x-4)/\sqrt{-16x^2-8x+4n}$
11	$((3-4n)x+1)/\sqrt{-16x^2+16x+2n}$	26	$(2n+2+3x)/\sqrt{36x^2+12x+4n}$
12	$(3n-2+x)/\sqrt{36x^2-12x+3n}$	27	$((4n+1)x+2)/\sqrt{-25x^2+10x+5n}$

13	$((4+n)x+3)/\sqrt{-25x^2-10x+3n}$	28	$(5n+3+2x)/\sqrt{9x^2+12x+4n}$
14	$(4n-2+2x)/\sqrt{9x^2-18x+3n}$	29	$((2+3n)x-2)/\sqrt{-16x^2-16x+2n}$
15	$((4+2n)x+1)/\sqrt{-4x^2-8x+3n}$	30	$(3n-1+3x)/\sqrt{4x^2+8x-4n}$

Интегрирование правильных рациональных дробей

В предыдущем пункте было показано, что при интегрировании неправильной рациональной дроби необходимо выделить из нее целую часть и проинтегрировать полученные многочлены и правильную рациональную дробь. В рассмотренных примерах нахождение интегралов сводилось к табличным интегралам либо сразу, либо с помощью подстановки. Предположим, что знаменатель такой дроби содержит не один, а несколько линейных или квадратичных множителей. В этом случае правильную рациональную дробь представляют в виде суммы так называемых простейших дробей. При этом множителю типа $(x-a)^k$ соответствует сумма простейших дробей:

$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$, а множителю $\left(x^2+px+q\right)^m$ - сумма

$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_mx+C_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}$, где коэффициенты

$A_1,A_2,\ldots,B_1,B_2,\ldots,C_1,C_2,\ldots$ находятся методом неопределенных коэффициентов. Согласно этому методу требуется привести указанное равенство к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от простейших рациональных дробей.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{x^2+6}{(x+1)(x-2)^2}dx$.

Поскольку множителю $x+1$ соответствует простейшая дробь $\frac{A}{x+1}$, а двукратному множителю $(x-2)^2$ - сумма двух дробей $\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$, то подынтегральная функция может быть представлена следующим образом:

$$\frac{x^2+6}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим:

$$x^2+6=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1).$$

Следовательно, $x^2+6=A\left(x^2-4x+4\right)+B\left(x^2-x-2\right)+C(x+1)$.

В правой части сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$x^2+6=(A+B)x^2+(-4A-B+C)x+(4A-2B+C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -4A-B+C=0, \\ 4A-2B+C=6, \end{cases}$$ из которой найдем: $A=\frac{7}{9}, B=\frac{2}{9}, C=\frac{10}{3}$.

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид:

$\frac{x^2+6}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{7}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}+\frac{10}{3(x-2)^2}$. Таким образом,

$$\int\frac{x^2+6}{(x+1)(x-2)^2}dx=\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{10}{3}\int\frac{dx}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{7}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|-\frac{10}{3(x-2)}+C.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{5-x}{(x-3)\left(x^2+4\right)}dx$.

Заметим, что множителю $x-3$ соответствует простейшая дробь $\frac{A}{x-3}$, а множителю x^2+4 - дробь $\frac{Bx+C}{x^2+4}$. А потому, представим подынтегральную функцию как сумму двух дробей: $\frac{5-x}{(x-3)\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$.

Освободимся от знаменателя:

$$5-x=A\left(x^2+4\right)+(Bx+C)(x-3) \text{ или}$$

$$5-x=(A+B)x^2+(-3B+C)x+(4A-3C).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -3B+C=-1, \\ 4A-3C=5. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $A=\frac{2}{13}, B=-\frac{2}{13}, C=-\frac{19}{13}$. Таким образом,

$$\frac{5-x}{(x-3)(x^2+4)}=\frac{2}{13(x-3)}-\frac{1}{13}\cdot\frac{2x+19}{x^2+4}$$, и, следовательно,

$$\int\frac{5-x}{(x-3)(x^2+4)}dx=\frac{2}{13}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{13}\int\frac{2x+19}{x^2+4}dx=\frac{2}{13}\ln|x-3|-$$

$$-\frac{1}{13}\int\frac{2xdx}{x^2+4}-\frac{19}{13}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{2}{13}\ln|x-3|-\frac{1}{13}\ln|x^2+4|-\frac{19}{26}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$$

Отметим, что при вычислении интеграла $\int\frac{2xdx}{x^2+4}$ используется подстановка $t=x^2+4$.

Вычисление интегралов таким способом позволит Вам выполнить **задание 10.**

Задание 10. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где *f(x)* выбирается из таблицы

	f(x)		*f(x)*
1	$\frac{x^2-n-1}{(x-1)(x^2+1)}$	16	$\frac{n+1+2x}{(x-n)(2x-1)}$
2	$\frac{2x+n}{(x-1)^2(x+2)}$	17	$\frac{n+2-x^2}{(x^2-4)(x+1)}$
3	$\frac{x+n+1}{(x-2)(x^2+1)}$	18	$\frac{n+2x}{x(x-)(x+1)}$
4	$\frac{x^2+x+n}{(x-2)(x^2+3)}$	19	$\frac{n+x+1}{(x+2)(x-n-1)}$
5	$\frac{n-x}{(x+1)^2(x-3)}$	20	$\frac{2x-n-1}{(x^2+1)(x-3)}$
6	$\frac{2x-n}{(x+n)(2x-1)}$	21	$\frac{n-x+1}{(1+x)(1+x^2)}$
7	$\frac{n-x^2+1}{(x^2-1)(x+2)}$	22	$\frac{x^2+n+2}{x(x^2-4)}$
8	$\frac{x^2-n}{x(x+1)(x+2)}$	23	$\frac{2x+n}{(x+1)^2(x+2)}$
9	$\frac{1+n+x}{(x-2)(x^2+1)}$	24	$\frac{x+n+2}{x^2(1-x)}$
10	$\frac{x-n}{(x+1)^2(x-2)}$	25	$\frac{2x-n-1}{(n+x)(x+1)}$

11	$\dfrac{n+1+x}{(n-x)(x+1)}$	26	$\dfrac{2-x+n}{(1+x)x^2}$
12	$\dfrac{n-2x}{(x^2-4)(x+1)}$	27	$\dfrac{n+2x}{(x+1)(x^2-4)}$
13	$\dfrac{x+n}{x(x-1)(x-2)}$	28	$\dfrac{n+x}{x(x+1)(x+3)}$
14	$\dfrac{x+n+1}{x(x^2-1)}$	29	$\dfrac{2x+1+n}{(n-x)(x+2)}$
15	$\dfrac{x^2+n}{(x-1)(x^2+2)}$	30	$\dfrac{2-x+n}{(1+x)(x+n+1)}$

Формула интегрирования по частям.

Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int U\cdot dV = U\cdot V - \int V\cdot dU,$$

где U и V - две дифференцируемые функции.

Применение этой формулы целесообразно в случаях, когда подынтегральное выражение представляет собой:

1. произведение ***многочлена*** на одну из следующих функций $\sin x, \cos x, e^x, a^x, \ln x, \log_a x, \arcsin x, \arccos x, \mathrm{arctg} x, \mathrm{arcctg} x$ **;**

2. произведение функций $\sin x$ или $\cos x$ на e^x или a^x;

3. функцию вида $\sqrt{ax^2+b}$.

Существуют также некоторые специфические случаи, в которых применение других методов (например, метода подстановки) не дает эффекта.

При использовании формулы интегрирования по частям необходимо разбить подынтегральную функцию на два сомножителя U и dV руководствуясь правилом: *за* U *нужно обозначить ту часть подынтегрального выражения, которая сильнее упрощается при дифференцировании. Причем оставшееся выражение (принятое за* dV*) должно легко интегрироваться.*

Рассмотрим типичные примеры:

а) $\int (2x-4)\cos 3x dx$.

Положим $U = 2x-4$ (т.к. U существенно упрощается при дифференцировании),

и $dV = \cos 3x$ (легко интегрируется).

Тогда $dU = 2dx$, $V = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x$.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int (2x-4)\cos 3x dx = (2x-4)\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x \cdot 2dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x-4)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C$$

б) $\int 2x \cdot \mathrm{arctg}x dx$

Положим $U = \mathrm{arctg}x$ (т.к. $\mathrm{arctg}x$ U упрощается при дифференцировании, а табличного интеграла не имеет, значит, не принимается за dV),

и $dV = 2x$ (легко интегрируется).

Тогда $dU = \frac{1}{1+x^2}dx$, $V = \int 2xdx = x^2$.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int 2x \cdot \mathrm{arctg}x\, dx = \mathrm{arctg}x \cdot x^2 - \int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= \mathrm{arctg}x \cdot x^2 - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}x \cdot x^2 - \int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx =$$

$$= \mathrm{arctg}x \cdot x^2 - x + \mathrm{arctg}x + C.$$

в) $\int \sqrt{x^2+2}dx$

В некоторых случаях после применения формулы интегрирования по частям вновь возникает искомый интеграл с другим коэффициентом. Необходимо перенести его в одну сторону и выразить через оставшиеся функции.

Положим $U = \sqrt{x^2+2}$, и $dV = dx$.

Тогда $dU = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot 2xdx = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$, $V = x$.

Применим формулу интегрирования по частям и проинтегрируем:

$$\int \sqrt{x^2+2}dx = \sqrt{x^2+2}\cdot x - \int \frac{x \cdot xdx}{\sqrt{x^2+2}} =$$

$$= \sqrt{x^2+2}\cdot x - \int \frac{x^2+2-2}{\sqrt{x^2+2}}dx = \sqrt{x^2+2}\cdot x - \int \sqrt{x^2+2}dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+2}}dx =$$

$$= \sqrt{x^2+2}\cdot x - \int \sqrt{x^2+2}dx + 2\ln(x+\sqrt{x^2+2}) + C.$$

Выразим исходный интеграл и получим ответ:

$$\int \sqrt{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+2}\cdot x - 2\ln(x+\sqrt{x^2+2})\right] + C.$$

Вычисление интегралов такими способами позволит Вам выполнить **задание 11 и 12.**

Задание 11. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где *f(x)* выбирается из таблицы

#	*f(x)*	#	*f(x)*
1	$(nx+1)^2\sin x$	16	$(n-x)\cos(3x-1)$
2	$2x^2\cos(3-nx)$	17	$(x^2-n)\cdot e^{3x}$
3	$(nx+3)\sin(x+2n)$	18	$(n+1+2x)\cos(2x+4n)$
4	$(1+n+x^2)\cdot e^{-x}$	19	$(x^2-2)\cos(1-nx)$
5	$(x^2+n+2)\sin nx$	20	$(x+n+1)\sin(2x-n)$
6	$(nx^2+2)\sin(x+n)$	21	$(n+1+x^2)\cdot e^{-3x}$
7	$(3-2nx^2)\cos(x-2n)$	22	$((2n+1)x+1)\sin(n-2x)$
8	$(nx+4)^2\sin 2x$	23	$(n-2x)\cos(3x+n-1)$
9	$(2x+n)^2\cos(1-nx)$	24	$(3x^2+1-n)\cdot e^{2x}$
10	$(nx^2+3)\sin x$	25	$(2n-1+3x)\cos(2x+n)$
11	$(2n-x^2)\cdot e^{-nx}$	26	$(2x^2+n)\cos(nx)$
12	$(x^2+3n)\sin nx$	27	$(3x-n+3)\sin(2n-x)$
13	$(1+nx^2)\cos(x+n)$	28	$(n+3+2x^2)\cdot e^{x}$
14	$(n+x^2)\cdot e^{-x+1}$	29	$((n+1)x+2)\sin(2n-3x)$
15	$(2x+n+4)^2\cos(nx)$	30	$(2n+x^2)\cdot e^{-x+n}$

Задание 12. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где *f(x)* выбирается из таблицы

	f(x)		*f(x)*
1	$nx^2\mathrm{arctg}x$	16	$(n-x)\arccos x$

2	$\operatorname{arctg}((n+1)x+4)$	17	$(x^2-n)\operatorname{arcctg}x$
3	$(nx+1)\ln x$	18	$(n+1+2x)\operatorname{arcctg}2x$
4	$\sqrt{4x^2+n}$	19	$\sqrt{2x^2-n-1}$
5	$(x^2+n+2)\ln nx$	20	$(x+n+1)\arcsin 2x$
6	$(nx+2)\ln(x+n)$	21	$\ln(n+1+x^2)$
7	$(3-2nx)\ln(x-2n)$	22	$\operatorname{arctg}((2n+1)x+1)$
8	$(n+x^2)\operatorname{arctg}x$	23	$\ln(2nx+n+4)$
9	$(1-n-x)\operatorname{arctg}2x$	24	$(2nx-n-1)\ln 2nx$
10	$(n-x)\arcsin x$	25	$(1+n+x^2)\ln(nx^2)$
11	$(2n+x)\arcsin 2x$	26	$(2x+n)\operatorname{arctg}x$
12	$\sqrt{9x^2-n}$	27	$nx\arccos x$
13	$\ln(x^2+n+1)$	28	$\ln(nx+n+2)$
14	$\ln(n-2x^2)$	29	$\sqrt{x^2+n+1}$
15	$(2x+n)\arcsin x$	30	$(n-x+2)\ln(x+n)$

Тригонометрические подстановки.

Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции, возможно благодаря использованию замены переменной, зачастую не видной на первый взгляд.

Приведем несколько типичных случаев с примерами. В дальнейшем $R(x,y)$ будет обозначать дробно-рациональную функцию двух переменных (т.е. дробь типа *многочлен/многочлен*), где в качестве аргументов будут выступать функции $\cos x$ и $\sin x$.

а) $\int R(\sin x,\cos x)dx$ (Примеры: $\int \frac{1}{1-\sin x}dx$, $\int \frac{2}{(\cos x)^6}dx$,

$$\int \frac{\sin x+2}{\cos^2 x}dx.$$

В самом общем случае можно использовать ***универсальную тригонометрическую подстановку***.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$\text{тогда } \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\text{а дифференциал } dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка приводит подынтегральную функцию к рациональной дроби

Рассмотрим пример.

$$\int\frac{1}{1-\sin x}dx = \int\frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int\frac{1+t^2}{1+t^2-2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt =$$

$$= \int\frac{2}{t^2-2t+1}dt = \int\frac{2}{(t-1)^2}dt = 2\int(t-1)^{-2}dt = -\frac{2}{t-1} + C =$$

$$= -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1} + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка часто формирует громоздкие дроби. Иногда целесообразнее использовать другую замену переменных, например, как в нижеследующих случаях.

б) $\int R(\sin x)\cdot\cos x dx$ или $\int R(\cos x)\cdot\sin x dx$,

т.е. одна из функций входит в состав рациональной дроби, а другая- множитель перед дифференциалом dx.

Применяются следующие замены переменных: $t = \sin x$ (для первого случая) или $t = \cos x$ (для второго случая).

Рассмотрим пример:

$$\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int\frac{1}{1+\cos^2 x}\cdot\sin x dx$$

Используется подстановка $t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx$, которая приводит к интегралу

$$\int\frac{1}{1+t^2}(-dt) = \operatorname{arcctg}t + C = \operatorname{arcctg}(\cos x) + C.$$

в) $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$, т.е. функции $\sin x, \cos x$ входят в рациональную дробь только в четных степенях.

Применяется замена переменных $t = \operatorname{tg}x$,
тогда

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Рассмотрим пример.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}dx = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)}dt = \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^2}dt =$$

$$= \int (t^2 + 2 + \frac{1}{t^2})dt = \frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{t} + C = \operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}x - \frac{1}{\operatorname{tg}x} + C.$$

г) В некоторых примерах требуется произвести упрощения, используя формулы тригонометрии. К этому случаю относятся интегралы типа:

1. $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$. Необходимо использовать формулы произведения синусов и косинусов

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x),$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = -\frac{1}{2}(\cos(m+n)x - \cos(m-n)x).$$

2. $\int \sin^2 nx \cdot \cos^4 nx dx$. Необходимо применить формулы понижения степени или синус двойного угла

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Рассмотрим пример

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 2x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}dx =$$

$$= \int \frac{1}{4}\left(1 - \cos 2x + \cos 4x - \cos 2x \cdot \cos 4x\right)dx =$$

проинтегрируем первых три слагаемых, а к последнему применим произведение косинусов

$$=\frac{1}{4}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x-\int \cos 2x\cdot\cos 4x dx\right]=$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x-\frac{1}{2}\int(\cos 6x+\cos 2x)dx=$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x-\frac{1}{4}\sin 2x+C=$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x+C.$$

При интегрировании тригонометрических выражений возможна также комбинация упрощения и последующей подстановки.

Вычисление интегралов такими способами позволит Вам выполнить **задание 13.**

Задание 13. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где *f(x)* выбирается из таблицы

	f(x)		*f(x)*
1	$\sin nx\cdot\cos 5x$	16	$\frac{4\cos nx+(n+1)\sin nx}{\cos^2 nx}$
2	$\sin 3x\cdot\sin nx$	17	$\frac{\cos^3 nx+n+2}{\sin^2 nx}$
3	$\frac{n+1}{n+\sin 2x}$	18	$\frac{n\cos^3 nx-3\sin nx}{\sin^2 nx}$
4	$\frac{2+n}{n+\cos 2x}$	19	$\cos^3 nx\cdot\sqrt[5]{\sin^4 nx}$
5	$\sin^4 nx\cdot\cos^3 nx$	20	$\frac{n+1+\cos^3 nx}{\sin^2 nx}$
6	$\sin^5 nx\cdot\cos^2 nx$	21	$(1-2\sin^2 nx)\sin^2 2nx$
7	$\cos(n+1)x\cdot\cos 7x$	22	$\sin^4 nx$
8	$\mathrm{tg}^3 nx$	23	$\cos^4(n+1)x$
9	$\frac{2n+1}{n+\cos^2 2x}$	24	$\frac{2+3n}{n+1+\cos x}$
10	$\frac{1+n}{n+1+\sin^2 2x}$	25	$\frac{-n+1}{-n+\sin x}$
11	$(2\cos^2 nx-1)\sin^2 2nx$	26	$\cos(2n+1)x\cdot\sin nx$

12	$\dfrac{n+1+\cos^3 nx}{\sin^2 nx}$	27	$\sin^3 nx\cdot\cos^4 nx$
13	$\sin^3 nx\cdot\sqrt[3]{\cos^2 nx}$	28	$\sin 5x\cdot\sin(n+2)x$
14	$(n+\sin^3 nx)$	29	$\cos nx\cdot\cos(n+1)x$
15	$\dfrac{2\sin nx-n\cos nx}{\cos^2 nx}$	30	$\dfrac{\sin^3 nx-n-1}{\cos^2 nx}$

Последнее **задание 14** содержит разные интегралы, берущиеся приведенными выше способами.

Задание 14. Взять интеграл $\int f(x)dx$, где *f(x)* выбирается из таблицы

	f(x)		*f(x)*
1	$\dfrac{\sqrt{nx}}{\sqrt{nx}+2}$	16	$\dfrac{\sqrt{x}+n}{\sqrt{x}-n}$
2	$\dfrac{\sqrt{x}+nx}{\sqrt{x}+n}$	17	$\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+n}$
3	$\dfrac{\sqrt{x}+n}{x+1}$	18	$x/\sin(nx^2)$
4	$\dfrac{\sin 2nx+\sin nx}{\cos nx}$	19	$\dfrac{x}{\sqrt{x}+n}-n$
5	$x\cos nx-\sqrt[3]{nx}$	20	$\dfrac{\sqrt{x+n}+2}{x+n+1}$
6	$\dfrac{\sqrt{2x-1}+n}{2x}$	21	$\dfrac{x^2}{\sqrt{x}+n}$
7	$1/\sin nx+xe^{nx^2}$	22	$\dfrac{\cos nx\cdot\sin nx}{\cos 2nx}+1$
8	$\dfrac{nx+1}{\sqrt{nx+1}-\sqrt[3]{nx}}$	23	$\dfrac{\mathrm{tg}nx-\sin nx}{\cos nx}$
9	$\cos nx\cdot e^{4\sin nx-n}$	24	$nx\cos(n+1)x-\sqrt[5]{nx^{n+1}}$
10	$(x^2+n)/(x^2-5)$	25	$x^2/(nx^3-n-1)$
11	$\dfrac{\sqrt{x+3}+n}{2\sqrt{x+3}-n}$	26	$\dfrac{4\sqrt{x-1}+n}{x-1}$

12	$(nx+1)/(x(x-2))$	27	$x/(x(x+n))$
13	$\dfrac{x\sqrt{x}-n}{2\sqrt{x}+n}$	28	$\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+n}$
14	$\dfrac{\sqrt{nx}}{\sqrt{nx}+n}$	29	$\sin x \cdot e^{\cos x}$
15	$\dfrac{n-x}{x^2(x+1)}$	30	$\dfrac{n}{x^2(x-n)}$